I. Banachovy algebry

I.1. Pojem Banachovy algebry s jednotkou a grupa invertibilních prvků.

Definice. **Banachovou algebrou** rozumíme komplexní algebru A, na níž je definovaná úplná norma splňující $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ pro všechna $x, y \in A$.

Poznámka. Pokud Banachova algebra A nemá jednotku, lze k ní jednotku přidat. Přesněji, pak existuje Banachova algebra B s jednotkou a její podalgebra kodimenze jedna, která je izometricky izomorfní s A (izomorfismus uvažujeme ve smyslu algeber, zachovává tedy i násobení). Dále budeme uvažovat pouze Banachovy algebry s jednotkou (nebude-li řečeno jinak).

Tvrzení 1 (další vlastnosti Banachových algeber). *Nechť $(A, \|\cdot\|)$ je Banachova algebra s jednotkou e. Pak platí*

- *$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.*
- *$A = \{0\}$, právě když $e = 0$.*
- *Jednotka je určena jednoznačně a $\|e\| \geq 1$, je-li A netriviální (různá od $\{0\}$).*
- *Je-li A netriviální, existuje ekvivalentní norma $\|\cdot\|_1$ na A tak, že $(A, \|\cdot\|_1)$ je Banachova algebra a $\|e\|_1 = 1$.*

Poznámka. Bez újmy na obecnosti dále předpokládáme, že A netriviální Banachova algebra s jednotkou e, pro kterou platí $\|e\| = 1$.

Definice. Nechť A je Banachova algebra.

- Prvek $x \in A$ se nazývá **invertibilní**, jestliže existuje $y \in A$ splňující $xy = yx = e$.
- Množinu všech invertibilních prvků A značíme $G(A)$.

Poznámka. Nechť A je Banachova algebra a $x \in A$. Pokud $y \in A$ splňuje $xy = e$, nazýváme jej **pravou inverzí** prvku x; splňuje-li $yx = e$, nazýváme jej **levou inverzí**. Prvek x může mít více různých pravých inverzí, stejně tak může mít více různých levých inverzí. Pokud však má pravou inverzi i levou inverzi, pak je invertibilní. Jeho inverzní prvek je jednoznačně určen a je zároveň jedinou pravou inverzí a jedinou levou inverzí.

Tvrzení 2 (o násobení invertibilních prvků). *Nechť A je Banachova algebra.*

- *$G(A)$ s operací násobení je grupa.*
- *Pokud $x_1, \dots, x_n$ komutují (po dvou), pak $x_1 \cdot \dots \cdot x_n \in G(A)$, právě když $\{x_1, \dots, x_n\} \subset G(A)$.*

Lemma 3 ("Neumannova geometrická řada"). *Nechť $(A, \|\cdot\|)$ je Banachova algebra s jednotkou e.*

- *Je-li $\|x\| < 1$ pro $x \in A$, platí $(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (řada konverguje absolutně) a $\|(e - x)^{-1} - e\| \leq \frac{\|x\|}{1 - \|x\|}$.*
- *Je-li $x \in G(A)$, $h \in A$ a $\|h\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}$, je*

$$\|(x + h)^{-1} - x^{-1}\| \leq \frac{\|x^{-1}\|^2 \|h\|}{1 - \|x^{-1}\|\|h\|}.$$

Věta 4 (topologické vlastnosti grupy invertibilních prvků). *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou. Pak*

- *$G(A)$ je otevřená podmnožina A,*
- *zobrazení $x \mapsto x^{-1}$ je homeomorfismus $G(A)$ na sebe,*
- *je-li $x_n \in G(A) \to x \notin G(A)$, pak $\|x_n^{-1}\| \to \infty$.*