# FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZA 1

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – ZS 2023/2024

PŘÍKLADY KE KAPITOLE VVIII

## K ODDÍLU VVIII.1 – MĚŘITELNOST VEKTOROVÝCH FUNKCÍ

**Příklad 1.** Nechť $\Gamma$ je libovolná množina a $\Sigma$ je $\sigma$-algebra podmnožin $\Gamma \times \Gamma$ generovaná všemi obdélníky (tj., množinami tvaru $A \times B$, kde $A, B \subset \Gamma$). Nechť dále $\Delta = \{(\gamma,\gamma), \gamma \in \Gamma\}$ je diagonála $\Gamma \times \Gamma$. Ukažte, že $\Delta \in \Sigma$, právě když mohutnost $\Gamma$ je nejvýše rovna mohutnosti kontinua.

`Návod:` *$\Leftarrow$: Předpoklad, že mohutnost $\Gamma$ je nejvýše rovna mohutnosti kontinua, znamená, že můžeme předpokládat $\Gamma \subset \mathbb{R}$. Dále existují taková spočetná dělení (disjunktní pokrytí) $\mathcal{P}_n = \{A_{n,m}; m \in \mathbb{N}\}$ množiny $\mathbb{R}$, že pro každé $n$ dělení $\mathcal{P}_{n+1}$ zjemňuje $\mathcal{P}_n$ a kdykoli pro každé $n$ máme $A_{n,m_n} \in \mathcal{P}_n$, pak průnik $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{n,m_n}$ je nejvýše jednobodový. $\Rightarrow$: Ukažte, že pro každé $M \in \Sigma$ existuje dělení $(A_j)_{j\in J}$ množiny $\Gamma$ takové, že mohutnost $J$ je nejvýše rovna mohutnosti kontinua a pro každé $j \in J$ platí buď $A_j \times A_j \subset M$ nebo $(A_j \times A_j) \cap M = \emptyset$. Nejprve dokažte, že obdélníky tuto vlastnost splňují, a potom, že se zachová na doplňky a spočetná sjednocení. Při důkazu zachovávání na spočetná sjednocení je důležité, že (i) spočetné sjednocení množin mohutnosti nejvýše kontinuum má opět mohutnost nejvýše kontiuum, a (ii) množina posloupností prvků množiny mohutnosti kontinua má také mohutnost kontinua.*

**Příklad 2.** Nechť $X$ je Banachův prostor mohutnosti větší než mohutnost kontinua, $\Omega = X \times X$ a $\Sigma$ nechť je $\sigma$-algebra podmnožin $\Omega$ generovaná borelovskými obdélníky (tj. množinami $A \times B$, kde $A, B \subset X$ jsou borelovské množiny). Definujme dvě funkce $f, g : \Omega \to X$ předpisem

$$f(x,y) = x, \quad g(x,y) = y \qquad \text{pro } (x,y) \in \Omega.$$

Ukažte, že $f$ i $g$ jsou borelovsky $\Sigma$-měřitelné, ale $f - g$ není borelovsky $\Sigma$-měřitelná.

`Návod:` *Použijte Příklad 1.*

**Příklad 3.** Nechť $(\Omega, \Sigma, \mu)$ je prostor s úplnou mírou, $X$ je Banachův prostor a $f : \Omega \to X$ je zobrazení. Bod $x \in X$ patří do **esenciálního oboru hodnot** $f$, pokud pro každé $U$, okolí $x$ v $X$, vzor $f^{-1}(U)$ není množina míry nula.

1. (1) Nechť $\mu$ je konečná míra a $f$ je borelovsky $\Sigma$-měřitelná. Ukažte, že the esenciální obor hodnot $f$ je separabilní.
2. (2) Nechť $f$ je esenciálně separabilně hodnotové (tj., $f$ má **esenciálně separabilní obor hodnot**). Ukažte, že esenciální obor hodnot $f$ je separabilní.
3. (3) Najděte příklad funkce, která nemá esenciálně separabilní obor hodnot, ale jejíž esenciální obor hodnot je prázdný (a tedy separabilní).

`Návod:` *(1) Je-li esenciální obor hodnot neseparabilní, obsahuje pro nějaké $\varepsilon > 0$ nespočetnou $\varepsilon$-diskrétní množinu $D$. Pak $f^{-1}(U(d, \varepsilon/2))$, $d \in D$, je nespočetný systém měřitelných množin kladné míry. (3) Uvažte například funkci $f : [0,1] \to \ell^2([0,1])$ definovanou vzorcem $f(t) = e_t$, viz Příklad VIII.6(1).*

**Příklad 4.** Ukažte, že následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:

(i) Existuje prostor $(\Omega, \Sigma, \mu)$ s konečnou úplnou mírou, Banachův prostor $X$ a borelovsky $\Sigma$-měřitelná funkce $f : \Omega \to X$, která není essenciálně separabilně hodnotová.
(ii) Existuje množina $\Gamma$ a nenulová konečná $\sigma$-aditivní míra definovaná na $\sigma$-algebře všech podmnožin $\Gamma$, která je nulová na jednobodových množinách (tj., existuje **reálně měřitelný kardinál**).

Návod: *(ii)⇒(i) Uvědomte si. že $\Gamma$ musí být nespočetná a uvažte $f : \Gamma \to \ell^2(\Gamma)$ definovanou vzorcem $f(\gamma) = e_\gamma$. (i)⇒(ii) Nechť $R$ je essenciální obor hodnot $f$. Podle Příkladu 3(1) je $R$ separabilní, tedy $\Omega \setminus f^{-1}(R)$ má kladnou míru. Tedy bez újmy na obecnosti $R = \emptyset$. Neboli, každý bod $x \in X$ má okolí, jehož vzor má míru nula. S využitím skutečnosti, že každý metrický prostor má $\sigma$-disjunktní bázi otevřených množin můžeme najít disjunktní systémy $\mathcal{U}_n$ otevřených množin se vzory nulové míry, že $\bigcup_n \bigcup \mathcal{U}_n = X$. Existuje $n$, že $\mu(f^{-1}(\bigcup \mathcal{U}_n)) > 0$. Položme $\Gamma = \mathcal{U}_n$ a $\nu(A) = \mu(f^{-1}(\bigcup A))$ pro $A \subset \Gamma$.*

**Příklad 5.** Nechť $(\Omega, \Sigma)$ je měřitelný prostor, $X$ je Banachův prostor a $(f_n)$ je posloupnost silně $\Sigma$-měřitelných funkcí $f_n : \Omega \to X$ taková, že pro každé $\omega \in \Omega$ posloupnost $(f_n(\omega))$ slabě konverguje k nějakému $f(\omega)$. Ukažte, že $f$ je silně $\Sigma$-měřitelná.

Návod: *Ukažte, že $f$ je slabě $\Sigma$-měřitelná a má separabilní obor hodnot (pomocí Mazurovy věty). Pak použijte Pettisovu větu.*

**Příklad 6.** Nechť $(\Omega, \Sigma, \mu)$ je prostor s úplnou mírou, $X$ je Banachův prostor a $(f_n)$ je posloupnost silně $\mu$-měřitelných funkcí $f_n : \Omega \to X$ takovám že pro skoro všechna $\omega \in \Omega$ posloupnost $(f_n(\omega))$ slabě konverguje k nějakému $f(\omega)$. Ukažte, že $f$ je silně $\mu$-měřitelná.

Návod: *Ukažte, že $f$ je slabě $\mu$-měřitelná a je esenciálně separabilně hodnotová (pomocí Mazurovy věty). Pak použijte Pettisovu větu.*

**Příklad 7.** Nechť $(\Omega, \Sigma, \mu)$ je interval $(0, \infty)$ s Lebesgueovou mírou, $X = L^p((0, \infty))$, přičemž $p \in [1, \infty)$. Nechť $\psi : (0, \infty) \to \mathbb{F}$ je funkce.

(1) Ukažte, že funkce $\phi : t \mapsto \psi(t) \cdot \chi_{(0,t)}$ je $\mu$-měřitelná právě když $\psi$ je lebesgueovsky měřitelná.
(2) Ukažte, že funkce $\phi : t \mapsto \psi \cdot \chi_{(0,t)}$ (i.e., $t \mapsto (u \mapsto \psi(u)\chi_{(0,t)}(u))$) je $\mu$-měřitelná právě když $\psi|_{(0,T)} \in L^p((0, T))$ pro každé $T \in (0, \infty)$.
(3) Předpokládejme, že $\psi$ má hodnoty v $(0, \infty)$. Ukažte, že funkce $\phi : t \mapsto \chi_{(0,\psi(t))}$ je $\mu$-měřitelná právě když $\psi$ je lebesgueovsky měřitelná.

Návod: *(1) $\Rightarrow$: $\phi(t) \in X$ pro každé $t$. Pro důkaz měřitelnosti $\psi$ uvažte funkcionály reprezentované funkcemi $\chi_{(0,T)}$, $T \in (0, \infty)$. $\Leftarrow$: Dokažte slabou měřitelnost. (2) $\Rightarrow$: Podmínka je nutná k tomu, aby $\phi(t) \in X$ pro každé $t$. $\Leftarrow$: Dokažte slabou měřitelnost. (3) $\Rightarrow$: $\phi(t) \in X$ pro každé $t$. Pro důkaz měřitelnosti $\psi$ uvažte funkcionály reprezentované funkcemi $\chi_{(0,T)}$, $T \in (0, \infty)$. $\Leftarrow$: Stačí dokázat slabou měřitelnost. Je snadno vidět, že $\phi$ je slabě měřitelná, pokud $\psi$ je spojitá. Dále, pokud $\psi_n \to \psi$ skoro všude na $(0, \infty)$, pak pro příslušné funkce $\phi_n$ a $\phi$ platí $\phi_n(t) \to \phi(t)$ slabě pro skoro všechna $t$.*

**Příklad 8.** Nechť $(\Omega, \Sigma, \mu)$ je interval $(0, \infty)$ s Lebesgueovou mírou, $X = L^\infty((0, \infty))$. Nechť $\psi : (0, \infty) \to \mathbb{F}$ je funkce.

(1) Ukažte, že funkce $\phi : t \mapsto \psi(t) \cdot \chi_{(0,t)}$ je silně $\mu$-měřitelná, právě když $\psi = 0$ skoro všude.

(2) Ukažte, že funkce $\phi : t \mapsto \psi \cdot \chi_{(0,t)}$ (tj. $t \mapsto (u \mapsto \psi(u)\chi_{(0,t)}(u))$) je silně $\mu$-měřitelná, právě když $\psi = 0$ skoro všude.

(3) Předpokládejme, že $\psi$ nabývá hodnot v $(0, \infty)$. Ukažte, že funkce $\phi : t \mapsto \chi_{(0,\psi(t))}$ je silně $\mu$-měřitelná, právě když $\psi$ je lebesgueovsky měřitelná a existuje spočetná množina $C \subset (0, \infty)$, že $\psi(t) \in C$ pro skoro všechna $t \in (0, \infty)$.

`Návod:` *(1) $\Leftarrow$: Pokud $\psi = 0$ skoro všude, pak $\phi = 0$ skoro všude. $\Rightarrow$: $\|\phi(t) - \phi(u)\| \geq |\psi(u)|$ pro $t < u$. Pokud $\psi(t) \neq 0$ na množině, která nemá míru nula, pak existuje $n \in \mathbb{N}$, pro které je $|\psi(t)| > \frac{1}{n}$ na množině, která nemá míru nula. Proto $\phi$ není esenciálně separabilně hodnotové. (2) $\Leftarrow$: Pokud $\psi = 0$ skoro všude, then $\phi = 0$ skoro všude. $\Rightarrow$: Nejpve si uvědomme, že $\psi$ musí být lebesgueovsky měřitelná. Dále, $\|\phi(t) - \phi(u)\| = \left\|\psi|_{(t,u)}\right\|$ pro $t < u$. Pokud $\psi \neq 0$ na množině kladné míry, existuje $n \in \mathbb{N}$, že množina $A = \{t; |\psi(t)| \geq \frac{1}{n}\}$ má kladnou míru. Nechť $Z$ je sjednocení všech otevřených intervalů $I$, pro která má $I \cap A$ míru nula. Pak $Z \cap A$ má rovněž míru nula. Tedy $(0, \infty) \setminus Z$ je uzavřená množina kladné míry. Označme $B$ množinu všech jednostranně izolovaných bodů $(0, \infty) \setminus Z$. Pak $B$ je spočetná, a tedy $C = (0, \infty) \setminus (Z \cup B)$ je množina kladné míry. Navíc pro $u, t \in C$, $u < t$, má $(u, t) \cap A$ kladnou míru. Odtud plyně, že $\phi$ není esenciálně separabilně hodnotové. (3) $\Leftarrow$: Ukažte, že $\phi$ je esenciálně separabilně hodnotová a borelovsky $\mu$-měřitelná. $\Rightarrow$: $\phi(t) \in X$ pro každé $t$. Pro důkaz měřitelnosti $\psi$ uvažte funkcionály reprezentované funkcemi $\chi_{(0,T)}$, $T \in (0, \infty)$. Dále, charakteristické funkce v $X$ tvoří diskrétní množinu, tedy v případě, že $\phi$ je eesenciálně separabilně hodnotová, najdeme příslušnou množinu $C$.*

**Příklad 9.** Nechť $K$ je kompaktní Hausfdorffův prostor a $X = \mathcal{C}(K)$ je prostor spojitých funkcí na $K$ se supremovou normou. Nechť $(\Omega, \Sigma)$ je měřitelný prostor a $f : \Omega \to X$ zobrazení.

(1) Předpokládejme, že $f$ je slabě $\Sigma$-měřitelná. Ukažte, že pro každé $k \in K$ je funkce $\omega \mapsto f(\omega)(k)$ $\Sigma$-měřitelná.

(2) Předpokládejme navíc, že $K$ je metrizovatelný. Ukažte, že platí i obrácená implikace. Tj. $f$ je slabě měřitelná, pokud pro každé $k \in K$ je funkce $\omega \mapsto f(\omega)(k)$ $\Sigma$-měřitelná .

`Návod:` *(2) Podle Rieszovy věty musíme ukázat, že funkce $\omega \mapsto \int_K f(\omega)(k)\, \mathrm{d}\mu(k)$ je měřitelná pro každou (znaménkovou či komplexní) Radonovu míru na $K$. Množina všech měr s touto vlastností obsahuje Diracovy míry (dle předpokladu). Dále je to vektorový podprostor a je uzavřená na limity slabě$^*$ konvergentních posloupností. Navíc absolutně konvexní obal Diracových měr je slabě$^*$ hustý v jednotkové kouli $B_{\mathcal{C}(K)^*}$ (podle věty o bipoláře). Nakonce, protože $\mathcal{C}(K)$ je separabilní, duální koule je metrizovatelná ve slabé$^*$ topologii, a tedy libovolná míra z jednotkové koule je slabou$^*$ limitou posloupnosti z absolutně konvexního obalu Dirakových měr.*

**Příklad 10.** Nechť $(\Omega, \Sigma, \mu)$ je interval $[0, 1]$ s Lebesgueovou mírou, $X = \mathcal{C}([0, 1])$ a $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{F}$ je funkce. Ukažte, že funkce

$$\Phi : t \mapsto f(t, \cdot)$$

je $\mu$-měřitelná funkce $\Omega \to X$, právě když

- $u \mapsto f(t, u)$ je spojitá na $[0, 1]$ pro každé $t \in [0, 1]$;
- $t \mapsto f(t, u)$ je lebesgueovsky měřitelná pro každé $u \in [0, 1]$.

## K oddílu VIII.2 – integrovatelnost vektorových funkcí

**Příklad 11.** Nechť $(\Omega, \Sigma, \mu)$ je prostor s úplnou mírou a $X$ je reflexivní Banachův prostor. Ukažte, že každá slabě integrovatelná funkce $f : \Omega \to X$ je pettisovsky integrovatelná.

**Příklad 12.** Nechť $(\Omega, \Sigma, \mu)$ je interval $(0,1)$ s Lebesgueovou mírou a $X = L^p((0,1))$, kde $p \in (1, \infty)$. Nechť $\psi : (0,1) \to \mathbb{F}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce. Definujme funkci $\phi : (0,1) \to X$ předpisem

$$\phi(t)(u) = \psi(t)\chi_{(0,t)}(u), \quad u \in (0,1), t \in (0,1).$$

(1) Ukažte, že $\phi$ je pettisovsky integrovatelná, právě když $\int_0^1 \left(\int_u^1 |\psi|\right)^p \mathrm{d}u < \infty$.
(2) Ukažte, že $\phi$ je bochnerovsky integrovatelná, právě když $\int_0^1 t^{1/p} |\psi(t)| \,\mathrm{d}t < \infty$.
(3) Je v tomto případě bochnerovská integrovatelnost ekvivalentní pettisovské integrovatelnosti?
(4) Spočtěte příslušný Pettisův či Bochnerův integrál.

`Návod:` *(1) Podle Příkladu 11 stačí ukázat slabou integrovatelnost. V důkaz použijte známý fakt, že $f \in L^p$, právě když pro každé $g \in L^q$ je $fg \in L^1$ (kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). (4) Spočtěte jako Pettisův integrál.*

**Příklad 13.** Nechť $(\Omega, \Sigma, \mu)$ je interval $(0,1)$ s Lebesgueovou mírou a $X = L^p((0,1))$, kde $p \in (1, \infty)$. Nechť $\psi : (0,1) \to \mathbb{F}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce, pro níž je $\psi|_{(0,r)} \in L^p((0,r))$ pro každé $r \in (0,1)$. Definujme funkci $\phi : (0,1) \to X$ předpisem

$$\phi(t)(u) = \psi(u)\chi_{(0,t)}(u), \quad u \in (0,1), t \in (0,1).$$

(1) Ukažte, že $\phi$ je pettisovsky integrovatelná, právě když $\int_0^1 (1-u)^p |\psi(u)|^p \,\mathrm{d}u < \infty$.
(2) Ukažte, že $\phi$ je bochnerovsky integrovatelná, právě když $\int_0^1 \left(\int_0^t |\psi|^p\right)^{1/p} \mathrm{d}t < \infty$.
(3) Je v tomto případě bochnerovská integrovatelnost ekvivalentní pettisovské integrovatelnosti?
(4) Spočtěte příslušný Pettisův či Bochnerův integrál.

`Návod:` *(1) Podle Příkladu 11 stačí ukázat slabou integrovatelnost. V důkaz použijte známý fakt, že $f \in L^p$, právě když pro každé $g \in L^q$ je $fg \in L^1$ (kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). (4) Spočtěte jako Pettisův integrál.*

**Příklad 14.** Nechť $(\Omega, \Sigma, \mu)$ je interval $(0,1)$ s Lebesgueovou mírou a $X = L^p((0,1))$, kde $p \in [1, \infty)$. Nechť $\psi : (0,1) \to (0,1]$ je lebesgueovsky měřitelná funkce. Definujme funkci $\phi : (0,1) \to X$ předpisem

$$\phi(t)(u) = \chi_{(0,\psi(t))}(u), \quad u \in (0,1), t \in (0,1).$$

Ukažte, že $\phi$ je bochnerovsky integrovatelná a spočtěte Bochnerův integrál.

**Příklad 15.** Nechť $(\Omega, \Sigma, \mu)$ je interval $(0, \infty)$ s Lebesgueovou mírou a $X = L^p((0, \infty))$, kde $p \in (1, \infty)$. Nechť $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ je lebesgueovsky měřitelná funkce. Definujme funkci $\phi : (0, \infty) \to X$ předpisem

$$\phi(t)(u) = \chi_{(0,\psi(t))}(u), \quad u \in (0, \infty), t \in (0, \infty).$$

(1) Ukažte, že $\phi$ je pettisovsky integrovatelná, právě když $\int_0^\infty \mu(\psi^{-1}(u, \infty))^p \, du < \infty$.
(2) Ukažte, že $\phi$ je bochnerovsky integrovatelná, právě když $\int_0^\infty |\psi(t)|^{1/p} \, dt < \infty$.
(3) Je v tomto případě bochnerovská integrovatelnost ekvivalentní pettisovské integrovatelnosti?
(4) Spočtěte příslušný Pettisův či Bochnerův integrál.

`Návod:` *(1) Podle Příkladu 11 stačí ukázat slabou integrovatelnost. V důkaz použijte známý fakt, že $f \in L^p$, právě když pro každé $g \in L^q$ je $fg \in L^1$ (kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). (4) Spočtěte jako Pettisův integrál.*

**Příklad 16.** Nechť $(\Omega, \Sigma, \mu)$ je interval $(0, 1)$ s Lebesgueovou mírou a $X = L^1((0, 1))$. Nechť $\psi : (0, 1) \to \mathbb{F}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce. Definujme funkci $\phi : (0, 1) \to X$ předpisem

$$\phi(t)(u) = \psi(t)\chi_{(0,t)}(u), \quad u \in (0, 1), t \in (0, 1).$$

(1) Ukažte, že $\phi$ je slabě integrovatelná, právě když $\int_0^1 t \, |\psi(t)| \, dt < \infty$.
(2) Ukažte, že $\phi$ je bochnerovsky integrovatelná, pokud je slabě integrovatelná.
(3) Spočtěte příslušný Bochnerův integrál.

**Příklad 17.** Nechť $(\Omega, \Sigma, \mu)$ je interval $(0, 1)$ s Lebesgueovou mírou a $X = L^1((0, 1))$. Nechť $\psi : (0, 1) \to \mathbb{F}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce, pro kterou je $\psi|_{(0,r)} \in L^1((0, r))$ pro každé $r \in (0, 1)$. Definujme funkci $\phi : (0, 1) \to X$ předpisem

$$\phi(t)(u) = \psi(u)\chi_{(0,t)}(u), \quad u \in (0, 1), t \in (0, 1).$$

(1) Ukažte, že $\phi$ je slabě integrovatelná, právě když $\int_0^1 (1 - u) \, |\psi(u)| \, du < \infty$.
(2) Ukažte, že $\phi$ je bochnerovsky integrovatelná, pokud je slabě integrovatelná.
(3) Spočtěte příslušný Bochnerův integrál.

**Příklad 18.** Nechť $(\Omega, \Sigma, \mu)$ je interval $(0, \infty)$ s Lebesgueovou mírou a $X = L^1((0, \infty))$. Nechť $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ je a lebesgueovsky měřitelná funkce. Definujme funkci $\phi : (0, \infty) \to X$ předpisem

$$\phi(t)(u) = \chi_{(0,\psi(t))}(u), \quad u \in (0, \infty), t \in (0, \infty).$$

(1) Ukažte, že $\phi$ je slabě integrovatelná, právě když $\int_0^\infty \mu(\psi^{-1}(u, \infty)) \, du < \infty$.
(2) Ukažte, že $\phi$ je bochnerovsky integrovatelná, právě když $\psi \in L^1((0, \infty))$.
(3) Ukažte, že v tomto případě je bochnerovský integrovatelnost ekvivalentní slabé integrovatelnosti.
(4) Spočtěte příslušný Bochnerův integrál.

**Příklad 19.** Nechť $(\Omega, \Sigma, \mu)$ je interval $(0, 1)$ s Lebesgueovou mírou a $X = L^\infty((0, 1))$. Nechť $\psi : (0, 1) \to (0, 1)$ je lebesgueovsky měřitelná funkce, která je "esenciálně spočetně hodnotová" (viz podmínku v Příkladu 8(3)). Definujme funkci $\phi : (0, 1) \to X$ předpisem

$$\phi(t)(u) = \chi_{(0,\psi(t))}(u), \quad u \in (0, 1), t \in (0, 1).$$

Ukažte, že $\phi$ je bochnerovsky integrovatelná a spočtěte Bochnerův integrál.

**Příklad 20.** Nechť $(\Omega, \Sigma, \mu)$ je interval $(0, \infty)$ s Lebesgueovou mírou a $X = L^\infty((0,\infty))$. Nechť $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ je lebesgueovsky měřitelná funkce, která je "esenciálně spočetně hodnotová" (viz podmínku v Příkladu 8(3)). Definujme funkci $\phi : (0, \infty) \to X$ předpisem

$$\phi(t)(u) = \chi_{(0,\psi(t))}(u), \quad u \in (0, \infty), t \in (0, \infty).$$

Characterizujte funkce $\psi$, pro které je $\phi$ bochnerovsky integrovatelná, a spočtěte Bochnerův integrál.

**Příklad 21.** Nechť $(\Omega, \Sigma, \mu)$ je prostor s úplnou $\sigma$-konečnou mírou, $K$ je metrizovatelný kompaktní prostor a $f : \Omega \times K \to \mathbb{F}$ je funkce splňující následující vlastnosti:

- $t \mapsto f(\omega, t)$ je spojitá na $K$ pro každé $\omega \in \Omega$;
- $\omega \mapsto f(\omega, t)$ je $\mu$-měřitelná pro každé $t \in K$.

Definujme zobrazení $\Phi : \Omega \to \mathcal{C}(K)$ předpisem

$$\Phi(\omega) = f(\omega, \cdot), \quad \omega \in \Omega.$$

(1) Ukažte, že $\Phi$ je slabě integrovatelné, právě když $\sup\limits_{t\in K} \int_\Omega |f(\omega, t)| \, \mathrm{d}\mu(\omega) < \infty$.
(2) Předpokládejme, že $\Phi$ je slabě integrovatelná. Položme $g(t) = \int_\Omega f(\omega, t) \, \mathrm{d}\mu(\omega)$ (pro $t \in K$). Ukažte, že $g$ je univerzálně měřitelná (i.e., měřitelná pro každou Radonovu pravděpodobnostní míru na $K$) a že slabý integrál $\Phi$ přes $\Omega$ je prvek $\mathcal{C}(K)^{**} = \mathcal{M}(K)^*$ definovaný vzorcem

$$\nu \mapsto \int_K g \, \mathrm{d}\nu, \quad \nu \in \mathcal{M}(K).$$

(3) Najděte příklad, kdy $g$ není spojitá.
(4) Najděte příklad, kdy $g$ je spojitá, ale $\Phi$ není pettisovsky integrovatelná.
(5) Ukažte, že $\Phi$ je pettisovsky integrovatelná, právě když pro každé $A \in \Sigma$ je funkce $t \mapsto \int_A f(\omega, t) \, \mathrm{d}\mu(\omega)$ spojitá na $K$.
(6) Ukažte, že $\Phi$ je bochnerovsky integrovatelná, právě když $\int_\Omega \sup\limits_{t\in K} |f(\omega, t)| \, \mathrm{d}\mu(\omega) < \infty$.
(7) Je v tomto případě bochnerovská integrovatelnost ekvivalentní pettisovské integrovatelnosti?

`Návod:` *(1) $\Rightarrow$: Je-li $\Phi$ slabě integrovatelná, pak zobrazení $\varphi \mapsto \varphi\circ\Phi$ je spojitý lineární operátor $X^*$ do $L^1(\mu)$ (viz důkaz Tvrzení VIII.11). $\Leftarrow$: Je třeba ukázat, že pro každé $\nu \in \mathcal{M}(K)$ funkce $h_\nu : \omega \mapsto \int_K f(\omega, t) \, \mathrm{d}\nu(t)$ patří $L^1(\mu)$. Podle předpokladu to platí pro Diracovy míry, tedy i pro jejich lineární kombinace. Navíc, pokud $\nu_n \xrightarrow{w^*} \nu$ v $\mathcal{M}(K) = \mathcal{C}(K)^*$, pak $h_{\nu_n} \to h_\nu$ bodově. Je-li $\nu \in M(K)$ libovolná, existuje posloupnost $(\nu_n)$ lineárních kombinací Diracových měr, pro kterou $\nu_n \xrightarrow{w^*} \nu$ a $\|\nu_n\| \le \|\nu\|$ pro každé $n$. Posloupnost $(h_{\nu_n})$ je omezená $L^1(\mu)$, a tedy $h_\nu \in L^1(\mu)$ podle Fatouova lemmatu. (2) Použijte Fubiniovu větu. (5) Použijte (2) a definice. (6) Použijte Větu VIII.8.*

## K oddílu VIII.3 – Lebesgue-Bochnerovy prostory

**Příklad 22.** Nechť $(\Omega, \Sigma, \mu)$ je prostor s úplnou konečnou mírou, $p \in [1, \infty]$ a $X = c_0$. Každou funkci $\boldsymbol{f} : \Omega \to X$ lze kanonicky identifikovat s posloupností $(f_n)$ skalárních funkcí na $\Omega$.

(1) Ukažte, že funkce $\boldsymbol{f} : \Omega \to X$ je $\mu$-měřitelná, právě když $f_n$ je $\mu$-měřitelná pro každé $n \in \mathbb{N}$.
(2) Nechť $\boldsymbol{f} : \Omega \to X$ je $\mu$-měřitelná. Spočtěte $\|\boldsymbol{f}\|_p$ a pomocí nalezeného vzorce popište prostor $L^p(\mu; X)$.
(3) Ukažte, že $L^\infty(\mu, X)$ je kanonicky izometrický vlastnímu podprostoru $\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} L^\infty(\mu)\right)_{\ell^\infty}$ a tento podprostor popište.

`Návod:` *(1) Uvažte slabou měřitelnost.*

**Příklad 23.** Nechť $(\Omega, \Sigma, \mu)$ je prostor s úplnou konečnou mírou, $p \in [1, \infty]$, $q \in [1, \infty)$ a $X = \ell^q$. Každou funkci $\boldsymbol{f} : \Omega \to X$ lze kanonicky identifikovat s posloupností $(f_n)$ skalárních funkcí na $\Omega$.

(1) Ukažte, že funkce $\boldsymbol{f} : \Omega \to X$ je $\mu$-měřitelná, právě když $f_n$ je $\mu$-měřitelná pro každé $n \in \mathbb{N}$.
(2) Nechť $\boldsymbol{f} : \Omega \to X$ je $\mu$-měřitelná. Spočtěte $\|\boldsymbol{f}\|_p$ a pomocí nalezeného vzorce popište prostor $L^p(\mu; X)$.
(3) Za předpokladu $p = q$ ukažte, že $L^p(\mu; X)$ je kanonicky izometrický prostoru $\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} L^p(\mu)\right)_{\ell^p}$.

`Návod:` *(1) Uvažte slabou měřitelnost.*

**Příklad 24.** Nechť $(\Omega, \Sigma, \mu)$ je prostor s úplnou konečnou mírou, $p \in [1, \infty]$ a $X = \ell^\infty$. Každou funkci $\boldsymbol{f} : \Omega \to X$ lze kanonicky identifikovat s posloupností $(f_n)$ skalárních funkcí na $\Omega$.

(1) Ukažte, že funkce $\boldsymbol{f} : \Omega \to X$ je $\mu$-měřitelná právě když je essenciálně separabilně hodnotová a $f_n$ je $\mu$-měřitelná pro každé $n \in \mathbb{N}$.
(2) Nechť $\boldsymbol{f} : \Omega \to X$ je $\mu$-měřitelná. Spočtěte $\|\boldsymbol{f}\|_p$ a pomocí nalezeného vzorce popište prostor $L^p(\mu; X)$.
(3) Ukažte, že $L^\infty(\mu, X)$ je kanonicky izometrický vlastnímu podprostoru $\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} L^\infty(\mu)\right)_{\ell^\infty}$ a tento podprostor popište.

`Návod:` *(1) Implikace $\Rightarrow$ je zřejmá. Pro důkaz obrácené implikace si uvědomte, že vzor při $\boldsymbol{f}$ každé otevřené koule v $X$ patří do $\Sigma$ a pomocí předpokladu, že $\boldsymbol{f}$ je esenciálně separabilně hodnotová dokažte borelovskou $\mu$-měřitelnost.*

**Příklad 25.** Nechť $(\Omega, \Sigma, \mu)$ je prostor s úplnou $\sigma$-konečnou mírou, $p \in [1, \infty]$, nechť $p^* \in [1, \infty]$ je sdružený exponent, $X$ je Banachův prostor a $X^*$ jeho duál.

(1) Nechť $f \in L^p(\mu; X)$ a $g \in L^{p^*}(\mu; X^*)$. Ukažte, že the funkce
$$h(\omega) = g(\omega)(f(\omega)), \quad \omega \in \Omega,$$
je $\mu$-integrovatelná a platí $\|h\|_1 \leq \|g\|_{p^*} \cdot \|f\|_p$.

(2) Pro $g \in L^{p^*}(\mu; X^*)$ položme
$$\Phi_g(f) = \int_\Omega g(\omega)(f(\omega)) \, \mathrm{d}\mu(\omega), \quad f \in L^p(\mu; X).$$
Ukažte, že $\Phi_g$ je spojitý lineární funkcionál na $L^p(\mu; X)$ a $\|\Phi_g\| \leq \|g\|_{p^*}$.

(3) Ukažte, že $\|\Phi_g\| = \|g\|_{p^*}$ a z toho odvoďte, že $\Phi : g \mapsto \Phi_g$ je lineární izometrie $L^{p^*}(\mu; X^*)$ dp $L^p(\mu, X)^*$.

(4) Ukažte, že zobrazení $\Phi$ je na $L^p(\mu, X)^*$, pokud $p \in [1, \infty)$ a $X = c_0$ nebo $X = \ell^q$ pro nějaké $q \in (1, \infty)$.

(5) Ukažte, že zobrazení $\Phi$ je na $L^p(\mu, X)^*$, pokud $p \in [1, \infty)$ a $(\Omega, \Sigma, \mu)$ je množina $\mathbb{N}$ s počítací mírou.

(6) Ukažte, že zobrazení $\Phi$ není na, pokud $(\Omega, \Sigma, \mu)$ je interval $[0, 1]$ s Lebesgueovou mírou a $X = \ell^1$.

`Návod:` *(1) Nejprve je třeba ukázat měřitelnost $h$. Je-li $g$ jednoduchá funkce, je to snadné. K důkazu obecného případu použijte existenci posloupnosti jednoduchých integrovatelných funkcí konvergující skoro všude ke $g$. Nerovnost odvoďte z Hölderovy nerovnosti. (2) plyne z (1). (3) Protože spočetně hodnotové funkce jsou husté v $L^{p^*}(\mu; X^*)$, stačí rovnost dokázat pro spočetně hodnotovou $g$. Jedna nerovnost plyne z (2), stačí dokázat opačnou. Nechť $\varepsilon > 0$. Podle skalární verze existuje nezáporná měřitelná funkce $h$ splňující $\|h\|_p = 1$ a $\int_\Omega h(\omega) \|g(\omega)\| \, \mathrm{d}\mu(\omega) > \|g\|_{p^*} - \varepsilon$. Nechť $g = \sum_{j=1}^\infty x_j^* \chi_{E_j}$, kde $x_j^* \in X^*$ a $E_j \in \Sigma$ splňují $0 < \mu(E_j) < \infty$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Zvolme posloupnost kladných čísel $\delta_j > 0$, která jsou dostatečně malá a najděme $x_j \in X$ splňující $\|x_j\| = 1$ a $x_j^*(x_j) > \left\|x_j^*\right\| - \delta_j$. Vezměte $f = \sum_{j=1}^\infty h x_j \chi_{E_j}$. Pak $f \in L^p(\mu; X)$, $\|f\|_p = 1$ a $\Phi_g(f) > \|g\|_{p^*} - 2\varepsilon$. (4) Použijte Příklady 22 a 23 a metodu důkazu reprezentace duálů k $c_0$ a $\ell^p$. (5) Použijte Příklad VIII.16(2). (6) S použitím Příkladu 23 a metody důkazu reprezentace duálu k $\ell^1$ popište duál k $L^p(\mu; \ell^1)$ a porovnejte ho s prostorem $L^{p^*}(\mu; \ell^\infty)$ popsaným v Příkladu 24.*