FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZA 1

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – ZS 2023/2024

PŘÍKLADY KE KAPITOLE V

K oddílu V.1 – lokálně konvexní topologie a jejich generování

Příklad 1. Nechť X je vektorový prostor. Nechť $\mathcal{U}$ je systém všech absolutně konvexních pohlcujících množin.

(1) Ukažte, že $\mathcal{U}$ je báze okolí nuly v nějaké Hausdorffově lokálně konvexní topologii $\mathcal{T}$ na X.
(2) Ukažte, že tato topologie $\mathcal{T}$ je nejsilnější lokálně konvexní topologie na X.
(3) Ukažte, že každá konvergentní posloupnost v $(X, \mathcal{T})$ je obsažena v podprostoru konečné dimenze.
(4) Ukažte, že $\mathcal{T}$ je generovaná systémem všech pseudonorem na X.

`Návod:` *(3) Kdyby ne, pak existuje lineárně nezávislá posloupnost (x_n), která konverguje k nule. Doplňme ji na algebraickou bázi. Pak popište absolutně konvexní pohlcující množinu, která neobsahuje žádný z vektorů x_n.*

Příklad 2. (1) Ukažte, že konvexní obal vyvážené podmnožiny vektorového prostoru je vyvážený, a tedy absolutně konvexní.
(2) Ukažte, že vyvážený obal konvexní množiny nemusí být konvexní.

`Návod:` *(2) Uvažte vhodnou úsečku v $\mathbb{R}^2$.*

Příklad 3. Nechť X je LCS a $A \subset X$ vyvážená množina s neprázdným vnitřkem.

(1) Ukažte, že $\operatorname{int} A$ je vyvážená, právě když $0 \in \operatorname{int} A$.
(2) Ukažte na protipříkladu, že $\operatorname{int} A$ nemusí být vyvážená.

Příklad 4. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je LCS a $A \subset X$ neprázdná. Ukažte, že

$$\overline{A} = \bigcap \{A + U; U \in \mathcal{T}(0)\}.$$

Příklad 5. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je LCS, který není Hausdorffův.

(1) Označme $Z = \overline{\{\boldsymbol{o}\}} = \bigcap \mathcal{T}(0)$. Ukažte, že Z je vektorový podprostor X.
(2) Nechť $Y = X/Z$ je kvocientový vektorový prostor a $q : X \to Y$ kanonické kvocientové zobrazení. Nechť $\mathcal{R}$ je kvocientová topologie na Y (tj. $\mathcal{R} = \{U \subset Y; q^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$). Ukažte, že $(Y, \mathcal{R})$ je HLCS.

K oddílu V.2 – omezené množiny, spojitá lineární zobrazení

Příklad 6. Nechť X je LCS a $A \subset X$. Ukažte, že A je omezená, právě když každá spočetná podmnožina A je omezená.

Příklad 7. Nechť X je LCS a $A, B \subset X$ jsou omezené množiny. Ukažte, že i množiny $A \cup B$, $A + B$, $\overline{A}$, $\mathrm{b}(A)$, $\operatorname{co} A$ a $\operatorname{aco} A$ jsou omezené.

Příklad 8. Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$. Ukažte, že A je omezená jakožto podmnožina LCS X, právě když je omezená v metrice generované normou.

Příklad 9. Nechť X je LCS, jehož topologie je generovaná translačně invariantní metrikou ρ.

(1) Ukažte, že množina $A \subset X$, která je omezená v X, je omezená i v metrice ρ.
(2) Ukažte, že množina $A \subset X$, která je omezená v metrice ρ, nemusí být omezená v TVS X.

`Návod:` *(2) Metrika ρ sama může být omezená.*

Příklad 10. Uvažme prostor $(X, \mathcal{T})$ z Příkladu 1. Ukažte, že každý lineární funkcionál $L : X \to \mathbb{F}$ je spojitý.

Příklad 11. Nechť $X = \mathbb{F}^\Gamma$ a $A \subset X$. Ukažte, že A je omezená v X, právě když je „bodově omezená“, tj. právě když pro každé $\gamma \in \Gamma$ je množina $\{x(\gamma); x \in A\}$ omezená v $\mathbb{F}$.

Příklad 12. Nechť X je LCS a (x_n) je posloupnost prvků X. Ukažte, že posloupnost (x_n) je omezená v X, právě když pro každou posloupnost (λ_n) v $\mathbb{F}$ platí $\lambda_n \to 0 \Rightarrow \lambda_n x_n \to \boldsymbol{o}$.

Příklad 13. Nechť X je metrizovatelný LCS a (x_n) posloupnost prvků X. Ukažte, že existuje posloupnost kladných čísel (λ_n), pro kterou $\lambda_n x_n \to \boldsymbol{o}$.

`Návod:` *Nechť ρ je metrika generující topologii na X. Ukažte a pak použijte, že pro každé $x \in X$ platí $\lim_{t \to 0+} \rho(\boldsymbol{o}, tx) = 0$.*

Příklad 14. Platí tvrzení z Příkladu 13 i pro nemetrizovatelné LCS?

`Návod:` *Uvažte prostor z Příkladu 1.*

Příklad 15. Nechť X je LCS, jehož topologie je generovaná translačně invariantní metrikou ρ. Nechť (x_n) je posloupnost prvků X, která konverguje k nule. Ukažte, že existuje posloupnost kladných čísel (λ_n) splňující $\lambda_n \to \infty$ a $\lambda_n x_n \to \boldsymbol{o}$.

`Návod:` *Z translační invariance metriky ρ plyne $\rho(\boldsymbol{o}, nx) \leq n\rho(\boldsymbol{o}, x)$ pro $x \in X$ a $n \in \mathbb{N}$.*

Příklad 16. Platí tvrzení z předchozího příkladu pro obecný LCS?

`Návod:` *Uvažte například $X = c_0$ nebo $X = \ell^p$ pro $p \in (1, \infty)$ se slabou topologií (viz oddíl VI.1 z přednášky), (x_n) nechť je posloupnost kanonických jednotkových vektorů.*

K oddílu V.3 – prostory konečné a nekonečné dimenze

Příklad 17. Nechť X je metrizovatelný LCS nekonečné dimenze. Ukažte, že na X existuje nespojitý lineární funkcionál.

`Návod:` *Použijte algebraickou bázi X a Příklad 13.*

Příklad 18. Existuje na každém HLCS nekonečné dimenze nespojitý lineární funkcionál?

`Návod:` *Použijte Příklad 10.*

K oddílu V.4 – metrizovatelnost TVS

Příklad 19. Ukažte, že prostor $\mathbb{F}^\Gamma$ je metrizovatelný, právě když Γ je spočetná.

`Návod:` *K důkazu $\Leftarrow$ použijte Tvrzení V.21. K důkazu $\Rightarrow$ předpokládejte, že Γ je nespočetná a ukažte, že neexistuje spočetná báze okolí nuly. K tomu použijte definici součinové topologie, zejména fakt, že bázové okolí nuly je definováno pomocí konečně mnoha souřadnic.*

Příklad 20. Ukažte, že prostor $\mathbb{F}^\Gamma$ je normovatelný právě když Γ je konečná.

`Návod:` *K důkazu $\Rightarrow$ předpokládejte, že Γ je nekonečná a dokažte, že žádné okolí nuly není omezené. K tomu použijte definici součinové topologie, zejména fakt, že bázové okolí nuly je definováno pomocí konečně mnoha souřadnic.*

Příklad 21. Ukažte, že prostor $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{F})$ z Příkladu V.1(3) není normovatelný.

`Návod:` *Ukažte, že že žádné okolí nuly není omezené. K tomu použijte pseudonormy z Příkladu V.6(3).*

Příklad 22. Ukažte, že prostor $H(\Omega)$ z Příkladu V.1(4) není normovatelný.

`Návod:` *Postupujte podobně jako v předchozím příkladu.*

Příklad 23. Uvažme prostor $\mathcal{C}(T, \mathbb{F})$ spojitých funkcí na Tichonovově prostoru T s topologií stejnoměrné konvergence na kompaktních podmnožinách T (viz Příklad V.6(4)).

(1) Ukažte, že prostor $\mathcal{C}(T, \mathbb{F})$ je metrizovatelný, právě když existuje posloupnost (K_n) kompaktních podmnožin T taková, že pro každou kompaktní podmnožinu $K \subset T$ existuje $n \in \mathbb{N}$, pro které $K \subset K_n$.
(2) Předpokládejme, že T není σ-kompaktní. Ukažte, že $\mathcal{C}(T, \mathbb{F})$ není metrizovatelný.
(3) Předpokládejme, že T je lokálně kompaktní. Ukažte, že $\mathcal{C}(T, \mathbb{F})$ je metrizovatelný, právě když T je σ-kompaktní.
(4) Nechť $T = \mathbb{Q}$ (s topologií zděděnou z $\mathbb{R}$). Ukažte, že T je σ-kompaktní, ale $\mathcal{C}(T, \mathbb{F})$ není metrizovatelný.

`Návod:` *(1) K důkazu $\Leftarrow$ použijte Tvrzení V.21. K důkazu $\Rightarrow$ předpokládejte, že T neexistuje příslušná posloupnost (K_n), a ukažte, že neexistuje spočetná báze okolí nuly. To lze dokázat sporem. Předpokládejme, že (U_n) je báze okolí nuly, každé U_n lze definovat pomocí kompaktní podmnožiny $K_n \subset T$. Nechť $K \subset T$ je kompaktní, pro kterou $K \setminus K_n \neq \emptyset$ pro $n \in \mathbb{N}$. Nechť $V = \{f; \|f|_K\|_\infty < 1\}$. S využitím úplné regularity ukažte, že V neobsahuje žádnou z množin U_n. (3) Nechť T je lokálně kompaktní a σ-kompaktní. Ukažte, že existuje posloupnost (K_n) kompaktních podmnožin T, pro kterou platí $T = \bigcup_n K_n$ a $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$ pro $n \in \mathbb{N}$, a že tato posloupnost splňuje podmínku z (1). (4) Nechť (K_n) je posloupnost kompaktních podmnožin $\mathbb{Q}$. S použitím faktu, že každé kompaktní podmnožina $\mathbb{Q}$ je řídká zkonstruujtr posloupnost (x_n) v $\mathbb{Q}$ takovou, že $x_n \in \mathbb{Q} \setminus K_n$ a (x_n) konverguje k 0.*

Příklad 24. Ukažte, že prostor $\mathcal{C}(T, \mathbb{F})$ s topologií stejnoměrné konvergence na kompaktních podmnožinách Tichonovova prostoru T (viz Příklad V.6(4)) je normovatelný, právě když T je kompaktní.

`Návod:` *Předpokládejme, že T není kompaktní. Nechť U je okolí nuly definované pomocí kompaktní množiny $K \subset T$. Nechť $x \in T \subset K$. Ukažte, že $f \mapsto |f(x)|$ je spojitá pseudonorma, která není omezená na U.*

K oddílu V.5 - Fréchetovy prostory, totálně omezené množiny

Příklad 25. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor. Nechť $(|||\cdot|||_k)$ je posloupnost funkcí $X \to [0, \infty]$, které splňují následující podmínky:

- $|||\boldsymbol{o}|||_k = 0$;
- $\forall x \in X\, \forall \alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}\colon |||\alpha x|||_k = |\alpha| \cdot |||x|||_k$;
- $\forall x, y \in X\colon |||x + y|||_k \le |||x|||_k + |||y|||_k$;
- funkce $|||\cdot|||_k$ je zdola polospojitá, tj. pro každé $c \in \mathbb{R}$ je množina $\{x \in X; |||x|||_k \le c\}$ uzavřená;
- $\forall x \in X\colon \|x\| \le |||x|||_1 \le |||x|||_2 \le |||x|||_3 \le \dots$.

Označme $Y = \{x \in X; \forall k \in \mathbb{N}\colon |||x|||_k < +\infty\}$.

(1) Ukažte, že Y je vektorový podprostor prostoru X.
(2) Ukažte, že Y je Fréchetův prostor, je-li opatřen lokálně konvexní topologií generovanou posloupností norem $(|||\cdot|||_k)$.

Návod: *(2) Použijte Tvrzení V.21 z přednášky a postup důkazu Větičky I.5 na každou z norem* $|||\cdot|||_k$.

Příklad 26. Nechť $(X_n, \|\cdot\|_n)$ je posloupnost Banachových prostorů a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je dáno kvocientové zobrazení $P_n : X_{n+1} \to X_n$. Položme

$$Y = \{(x_n); \forall n \in \mathbb{N}\colon (x_n \in X_n \;\&\; x_n = P_n(x_{n+1}))\}.$$

Ukažte, že Y je Fréchetův prostor, pokud jej opatříme posloupností pseudonorem (p_k) definovaných vzorcem

$$p_k((x_n)) = \|x_k\|_k, \quad (x_n) \in Y.$$

Návod: *Použijte Tvrzení V.21 z přednášky.*

Příklad 27. Pomocí Příkladu 26 ukažte, že prostory $C(\mathbb{R}, \mathbb{F})$ a $H(\Omega)$ (viz Příklad V.1(3,4) z přednášky) jsou Fréchetovy prostory.

Příklad 28. Nechť X je LCS a $A, B \subset X$ jsou totálně omezené podmnožiny. Ukažte, že i množiny $A \cup B$, $A + B$, $\overline{A}$, $\mathrm{b}(A)$ jsou totálně omezené.

Příklad 29. Nechť X je LCS, jehož topologie je generovaná translačně invariantní metrikou ρ. Ukažte, že množina $A \subset X$ je totálně omezená v TVS X, právě když je totálně omezená v metrice ρ.

K oddílu V.6 – rozšiřovací a oddělovací věty

Příklad 30. Nechť X je normovaný lineární prostor nekonečné dimenze. Ukažte, že v X existují dvě disjunktní konvexní množiny, které jsou husté v X (a tedy je nelze oddělit nenulovým prvkem X^*).

Návod: *Využijte existenci nespojitého lineárního funkcionálu.*

Příklad 31. Nechť $X = \mathcal{C}([0,1])$ s L^2-normou (tj. $\|f\| = \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{1/2}$). Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ definujme $Y_\alpha = \{f \in X; f(0) = \alpha\}$. Ukažte, že $(Y_\alpha; \alpha \in \mathbb{R})$ je systém po dvou disjunktních hustých konvexních množin. Ukažte, že pro $\alpha \ne \beta$ nelze množiny Y_α a Y_β oddělit nenulovým prvkem X^*.

Příklad 32. Nechť $X = c_0$ nebo $X = \ell^p$ pro nějaké $p \in [1, \infty)$ (uvažujme prostory nad $\mathbb{R}$). Nechť $\boldsymbol{x} = (x_n) \in X$ je prvek, jehož všechny souřadnice jsou kladné, a $\boldsymbol{y} = (\frac{x_n}{n}) \in X$. Položme

$$A = \{\boldsymbol{z} = (z_n) \in X; \forall n \in \mathbb{N} : z_n \geq 0\}, \qquad B = \{-\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}; t \in \mathbb{R}\}.$$

Ukažte, že A a B jsou disjunktní uzavřené konvexní podmnožiny X, které není možné oddělit nenulovým prvkem X^*.

`Návod:` *Postupujte sporem: Nechť $f \in X^* \setminus \{0\}$ splňuje $\sup f(B) \leq \inf f(A)$. Ukažte, že nutně $f \geq 0$ na A a $\inf f(A) = 0$. Funkcionál f lze reprezentovat příslušnou posloupností (prvkem ℓ^1 resp. ℓ^q, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), ukažte, že všechny prvky této posloupnosti musí být nezáporné. Z předpokladu $\inf f(B) \leq 0$ odvoďte $f(\boldsymbol{y}) = 0$, a odtud $f = 0$, což dává spor.*

Další příklady - metrické vektorové prostory

Metrický vektorový prostor (krátce **MVS**) je vektorový prostor X nad $\mathbb{F}$ opatřený metrikou ρ, vůči níž jsou operace na X spojité, tj. platí:

- $x_n \to x$, $y_n \to y$ v $X \implies x_n + y_n \to x + y$ v X;
- $x_n \to x$ v X, $\lambda_n \to \lambda$ v $\mathbb{F} \implies \lambda_n x_n \to \lambda x$ v X.

Je zřejmé, že MVS je speciálním případem TVS. Přitom MVS nemusí být lokálně konvexní, o čemž svědčí například prostory L^p z Příkladu V.1(5) z přednášky.

Příklad 33. Nechť X je prostor všech lebesgueovsky měřitelných funkcí na $[0, 1]$ (s hodnotami v $\mathbb{F}$; ztotožňujeme funkce, které se rovnají skoro všude). Pro $f, g \in X$ položme

$$\rho(f, g) = \int_0^1 \min\{1, |f - g|\}.$$

(1) Ukažte, že ρ je metrika na X, s níž je X MVS.
(2) Ukažte, že konvergence posloupností v metrice ρ splývá s konvergencí v míře.
(3) Je výsledná topologie lokálně konvexní?

`Návod:` *(3) Ukažte, že pro každé $r > 0$ je konvexní obal množiny $\{f \in X; \rho(f, 0) < r\}$ celé X.*

Příklad 34. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a $q : X \to [0, \infty)$ je F-norma na X, tj. zobrazení s následujícími vlastnostmi:

- $q(x) = 0 \iff x = 0$;
- $\forall x \in X \forall \lambda \in \mathbb{F}, |\lambda| \leq 1 \colon q(\lambda x) \leq q(x)$;
- $\forall x, y \in X \colon q(x + y) \leq q(x) + q(y)$;
- $\forall x \in X \colon \lim_{t \to 0+} q(tx) = 0$.

Ukažte, že vzorec $\rho(x, y) = q(x - y)$ definuje translačně invariantní metriku na X, v níž je X MVS.

Příklad 35. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, $p \in (0, 1)$ a $q : X \to [0, \infty)$ je p-**norma** na X, tj. zobrazení s následujícími vlastnostmi:

- $q(x) = 0 \iff x = 0$;
- $\forall x \in X \forall \lambda \in \mathbb{F} \colon q(\lambda x) = |\lambda|^p \, q(x)$;
- $\forall x, y \in X \colon q(x + y) \leq q(x) + q(y)$.

Ukažte, že vzorec $\rho(x, y) = q(x - y)$ definuje translačně invariantní metriku na X, v níž je X MVS.

`Návod:` *Ukažte, že q je F-norma.*

Příklad 36. Nechť $p \in (0,1)$. Ukažte, že funkce $f \mapsto \|f\|_p = \int |f|^p \, d\mu$ je p-norma na $L^p(\mu)$.

Příklad 37. Nechť X je MVS, jehož metrika ρ je indukovaná p-normou pro nějaké $p \in (0,1)$. Ukažte, že množina $A \subset X$ je omezená v X, právě když je omezená v metrice ρ.

Příklad 38. Nechť $X = L^p([0,1])$, kde $p \in (0,1)$.

(1) Ukažte, že pro každé $r > 0$ platí $\operatorname{co}\{f \in X; \|f\|_p < r\} = X$.
(2) Ukažte, že existuje omezená podmnožina X, jejíž konvexní obal není omezená množina.
(3) Ukažte, že jediný spojitý lineární funkcionál na X je konstatní nulový funkcionál (tj. $X^* = \{0\}$).

`Návod:` *(1) Nechť $f \in X$ a $n \in \mathbb{N}$. Ukažte, že existuje dělení $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, že pro každé j platí $\int_{t_{j-1}}^{t_j} |f|^p = \frac{1}{n} \int_0^1 |f|^p$. Dále ukažte, že pro n dost velké mají funkce $nf\chi_{(t_{j-1},t_j)}$ p-normu menší než r. (2) Použijte (1) a předchozí příklad. (3) Použijte (1).*

Příklad 39. Nechť $X = \ell^p$, kde $p \in (0,1)$. Ukažte, že pro každou posloupnost $\boldsymbol{x} = (x_n) \in \ell^\infty$ vzorec

$$\varphi_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad \boldsymbol{y} = (y_n) \in \ell^p,$$

definuje spojitý lineární fukcionál na ℓ^p. Ukažte, že zobrazení $\boldsymbol{x} \mapsto \varphi_{\boldsymbol{x}}$ je lineární bijekce ℓ^∞ na X^*.

Příklad 40. Nechť $p \in (0,1)$. Ukažte, že ℓ^p je izomorfní (dokonce izometrické) podprostoru $L^p([0,1])$. S využitím předchozích dvou příkladů pak ukažte na protipříkladu, že spojitý lineární funkcionál na podprostoru MVS nemusí jít rozšířit na spojitý lineární funkcionál na celém prostoru.

Příklad 41. Nechť $X = L^p([0,1])$, kde $p \in (0,1)$. Zvolme kladná čísla ε, η a δ tak, aby platilo $p < \frac{1}{1+\varepsilon}$, $\frac{\eta}{\varepsilon} < p$, $\delta < \varepsilon$ a $\frac{\eta}{\varepsilon - \delta} < p$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n^{1+\eta}}$, $f_n = n^{1+\varepsilon}\chi_{(x_{n+1},x_n)}$ a $t_n = \frac{1}{n^{1+\delta}}$.

(1) Ukažte, že množina $K = \{0, f_1, f_2, f_3, \ldots\}$ je kompaktní v X.
(2) Ukažte, že množina $\operatorname{co} K$ není omezená v X.

`Návod:` *(1) Ukažte, že $f_n \to 0$ v $L^p([0,1])$. (2) Uvažte prvky $\frac{t_1 f_1 + \cdots + t_n f_n}{t_1 + \cdots + t_n}$.*