

VI. Slabé topologie

VI.1 Obecné slabé topologie a dualita

Definice. Nechť X je vektorový prostor nad \mathbb{F} .

- Symbolem $X^\#$ značíme **algebraický duál** prostoru X , tj. vektorový prostor všech lineárních funkcí $f : X \rightarrow \mathbb{F}$.
- Nechť $M \subset X^\#$ je neprázdna množina. Pak symbolem $\sigma(X, M)$ značíme topologii na X , které je generovaná systémem pseudonorem

$$\{x \mapsto |f(x)|; f \in M\}.$$

Nazýváme ji **slabou topologií generovanou M** .

Větička 1.

- (1) Prostor X opatřený topologií $\sigma(X, M)$ je LCS.
- (2) Topologie $\sigma(X, M)$ je Hausdorffova, právě když M **odděluje body X** , tj., právě když pro každé $x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}$ existuje $f \in M$ splňující $f(x) \neq 0$.
- (3) Funkcionály z M jsou spojité na $(X, \sigma(X, M))$.
- (4) $\sigma(X, M)$ je nejslabší (tj. nejmenší) topologie na X , vůči níž jsou všechny funkcionály z M spojité.
- (5) $\sigma(X, M) = \sigma(X, \text{span } M)$.
- (6) Nechť T je topologický prostor a $F : T \rightarrow X$ libovolné zobrazení. Pak F je spojité zobrazení T do $(X, \sigma(X, M))$, právě když pro každé $f \in M$ je $f \circ F$ spojité na T .

Příklady 2.

- (1) Nechť X je LCS. Pak $X^* \subset\subset X^\#$, topologii $\sigma(X, X^*)$ nazýváme **slabou topologií prostoru X** , někdy ji značíme též symbolem w . Je-li X Hausdorffův, je i topologie $\sigma(X, X^*)$ Hausdorffova.
- (2) Nechť X je LCS. Definujme zobrazení $\varkappa : X \rightarrow (X^*)^\#$ předpisem
$$\varkappa(x)(f) = f(x), \quad f \in X^*, x \in X.$$
Pak $\varkappa(X)$ je podprostor $(X^*)^\#$ oddělující body X^* , a tedy topologie $\sigma(X^*, \varkappa(X))$ je Hausdorffova. Nazývá se **slabá* topologie prostoru X^*** , značí se $\sigma(X^*, X)$ nebo také w^* . Je-li X Hausdorffův, je zobrazení \varkappa prosté.
- (3) Nechť Γ je neprázdna množina a prostor \mathbb{F}^Γ je opatřen součinnou topologií (viz Příklad V.1(2)). Součinná topologie je rovna $\sigma(\mathbb{F}^\Gamma, M)$, kde
$$M = \{x \mapsto x(\gamma); \gamma \in \Gamma\}.$$

- (4) Necht' T je topologický prostor a $\mathcal{C}(T, \mathbb{F})$ vektorový prostor spojitých funkcí na T . Pro $t \in T$ definujme funkcional $\varepsilon_t \in \mathcal{C}(T, \mathbb{F})^\#$ předpisem
- $$\varepsilon_t(f) = f(t), \quad f \in \mathcal{C}(T, \mathbb{F}).$$
- Pak $M = \{\varepsilon_t; t \in T\}$ je podmnožina $\mathcal{C}(T, \mathbb{F})^\#$ oddělující body $\mathcal{C}(T, \mathbb{F})$, topologie $\sigma(\mathcal{C}(T, \mathbb{F}), M)$ je tedy Hausdorffova. Nazývá se **topologií bodové konvergence**, značí se τ_p nebo $\tau_p(T)$.
- (5) Při značení z předchozího bodu necht' navíc $D \subset T$ je neprázdná podmnožina a $M_D = \{\varepsilon_t; t \in D\}$. Topologie $\sigma(\mathcal{C}(T, \mathbb{F}), M_D)$ se nazývá **topologií bodové konvergence na množině D** , značí se $\tau_p(D)$. Je-li D hustá v T , pak je topologie $\tau_p(D)$ Hausdorffova.

Lemma 3. Necht' X je vektorový prostor, $f, f_1, \dots, f_k \in X^\#$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (i) $f \in \text{span}\{f_1, \dots, f_k\}$;
- (ii) $\exists C > 0 \forall x \in X : |f(x)| \leq C \cdot \max\{|f_1(x)|, \dots, |f_k(x)|\}$;
- (iii) $\bigcap_{j=1}^k \text{Ker } f_j \subset \text{Ker } f$.

Věta 4. Necht' X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$ neprázdná množina. Pak $(X, \sigma(X, M))^* = \text{span } M$.

Důsledek 5.

- (a) Necht' X je LCS a $f \in X^\#$. Pak f je spojitý na X (tj. $f \in X^*$), právě když je slabě spojitý (tj. $\sigma(X, X^*)$ -spojitý) na X .
- (b) Necht' X je LCS. Pak $(X^*, \sigma(X^*, X))^* = \varkappa(X)$ (viz Příklad 2(2)).
- (c) Necht' X je normovaný lineární prostor a $f \in X^{**}$. Pak $f \in \varkappa(X)$ (kde $\varkappa : X \rightarrow X^{**}$ je kanonické vnoření), právě když f je slabě* spojitý (tj. $\sigma(X^*, X)$ spojitý) na X^* .

Poznámka: Slabé topologie jsou z definice lokálně konvexní. Nicméně i pro TVS tento oddíl něco říká:

- Je-li X TVS, lze slabou topologii na X definovat jako $\sigma(X, X^*)$ stejně jako v případě LCS. Slabá topologie je pak lokálně konvexní, ale nemusí být Hausdorffova, ani když X je Hausdorffův.
- Je-li X TVS, lze definovat zobrazení \varkappa jako výše a slabou* topologii na X^* jako $\sigma(X^*, \varkappa(X))$. Slabá* topologie je pak lokálně konvexní a Hausdorffova. Ale užitečnost takového pojmu je omezená, protože duál X^* může být velmi malý (i triviální, viz závěrečné poznámky v oddílu V.6). Kromě toho zobrazení \varkappa nemusí být prosté, ani když X je Hausdorffův.
- Body (a) a (b) Důsledku 5 platí i pro TVS (se stejným důkazem).