V.6 Rozšiřovací a oddělovací věty

Definice. Nechť X je LCS nad $\mathbb{F}$. Symbolem X^* budeme značit vektorový prostor všech spojitých lineárních funkcionálů $f : X \to \mathbb{F}$. Prostor X^* nazýváme **duálním prostorem** (či **duálem**) prostoru X.

Poznámky:

(1) Pro označení duálního prostoru se někdy používá symbol X'. V literatuře značení kolísá. My budeme používat pro „spojitý duál“, tj. pro prostor všech *spojitých* lineárních funkcionálů, symbol X^*. Pro „algebraický duál“, tj. pro prostor *všech* lineárních funkcionálů, budeme používat symbol $X^\#$.

(2) X^* definujeme pouze jako vektorový prostor, prozatím na něm nedefinujeme žádnou topologii. V dalších oddílech si ukážeme jednu přirozenou topologii na X^*. Přirozených topologií na X^* ovšem existuje více.

Věta 31 (Hahn-Banachova rozšiřovací věta). *Nechť X je LCS nad $\mathbb{F}$, $Y \subset\subset X$ a $f \in Y^*$. Pak existuje $g \in X^*$ splňující $g|_Y = f$.*

Důsledek 32 (oddělování od podprostoru). *Nechť X je LCS, Y uzavřený podprostor X a $x \in X \setminus Y$. Pak existuje $f \in X^*$ splňující $f|_Y = 0$ a $f(x) = 1$.*

Důsledek 33 (důkaz hustoty pomocí Hahn-Banachovy věty). *Nechť X je LCS a $Z \subset\subset Y \subset\subset X$. Pak Z je hustý v Y, právě když*

$$\forall f \in X^* : f|_Z = 0 \Rightarrow f|_Y = 0.$$

Důsledek 34 (duál odděluje body). *Nechť X je HLCS. Pak pro každé $x \in X \setminus \{0\}$ existuje $f \in X^*$, pro které je $f(x) \neq 0$.*

Věta 35 (oddělovací Hahn-Banachova věta). *Nechť X je LCS, $A, B \subset X$ neprázdné disjunktní konvexní množiny.*

(a) *Pokud A má neprázdný vnitřek, pak existuje $f \in X^* \setminus \{0\}$ a $c \in \mathbb{R}$, že platí*
$$\forall a \in A\, \forall b \in B : \operatorname{Re} f(a) \leq c \leq \operatorname{Re} f(b).$$

(b) *Pokud A je kompaktní a B uzavřená, pak existuje $f \in X^*$ a $c, d \in \mathbb{R}$, že platí*
$$\forall a \in A\, \forall b \in B : \operatorname{Re} f(a) \leq c < d \leq \operatorname{Re} f(b).$$

Důsledek 36. *Nechť X je LCS, $A \subset X$ neprázdná množina a $x \in X$. Pak platí:*

(a) *$x \in X \setminus \overline{\operatorname{co}} A$, právě když existuje $f \in X^*$ splňující*
$$\operatorname{Re} f(x) > \sup\{\operatorname{Re} f(a); a \in A\}.$$

(b) *$x \in X \setminus \overline{\operatorname{aco}} A$, právě když existuje $f \in X^*$ splňující*
$$|f(x)| > \sup\{|f(a)|\,; a \in A\}.$$

Poznámka. Pro obecné TVS je situace následující:

- Duální prostor X^* lze definovat stejně. Může však být triviální – i když X je netriviální HTVS, může se stát, že $X^* = \{0\}$ (to nastává například pro $X = L^p((0,1))$, kde $p \in (0,1)$). Proto Důsledek 34 pro TVS neplatí.
- Pro TVS neplatí Věta 31 ani Důsledky 32 a 33.
- Bod (a) Věty 35 platí i v TVS (se stejným důkazem), bod (b) ani Důsledek 36 neplatí.