V.3 Prostory konečné a nekonečné dimenze

Tvrzení 17. *Nechť X je HLCS konečné dimenze.*

(a) *Je-li Y libovolný LCS a $L : X \to Y$ je lineární zobrazení, pak L je spojité.*
(b) *Prostor X je izomorfní $\mathbb{F}^n$, kde $n = \dim X$.*

Důsledek 18. *Nechť X je HLCS. Pak každý jeho podprostor konečné dimenze je uzavřený.*

Definice. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je LCS a $A \subset X$. Množina A se nazývá **totálně omezená** (nebo též **prekompaktní**), jestliže pro každé $U \in \mathcal{T}(\boldsymbol{o})$ existuje $F \subset X$ konečná, pro kterou $A \subset F + U$.

Poznámka: Každá kompaktní množina v LCS je totálně omezená. Každá totálně omezená množina je omezená.

Lemma 19. *Nechť $(X, \mathcal{T})$ je LCS a $A \subset X$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) *Množina A je totálně omezená v X.*
(2) *A je totálně omezená v (X, p) pro každou spojitou pseudonormu p na X, tj.*

$\forall p$ spojitou pseudonormu na X

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists F \subset X \text{ konečná} \, \forall x \in A \, \exists y \in F \colon p(x - y) < \varepsilon.$$

(3) *Pro každou spojitou pseudonormu p na X a každou posloupnost (x_n) v A existuje podposloupnost (x_{n_k}), která je cauchyovská vůči pseudonormě p, tj.*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists k_0 \, \forall k, l \geq k_0 \colon p(x_{n_k} - x_{n_l}) < \varepsilon.$$

(V bodech (2) a (3) stačí podmínku testovat pro nějaký systém pseudonorem generující topologii X.)

Věta 20. *Nechť X je HLCS. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $\dim X < \infty$.
(ii) *Existuje kompaktní okolí nuly v X.*
(iii) *Existuje totálně omezené okolí nuly v X.*

Poznámka: Z tohoto oddílu o obecných TVS platí:

- Tvrzení 17 a Důsledek 18 beze změny.
- Totální omezenost se definuje stejně a poznámka za definicí platí beze změny.
- Věta 20 platí beze změny.