V.2 Spojitá a omezená lineární zobrazení

Tvrzení 12. *Nechť $(X,\mathcal{T})$ a $(Y,\mathcal{U})$ jsou LCS nad $\mathbb{F}$ a $L : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *L je spojité.*
(ii) *L je spojité v bodě $\boldsymbol{o}$.*
(iii) *L je* **stejnoměrně spojité**, *tj.*

$$\forall U \in \mathcal{U}(\boldsymbol{o})\,\exists V \in \mathcal{T}(\boldsymbol{o})\,\forall x,y \in X : x-y \in V \Rightarrow L(x)-L(y) \in U.$$

Tvrzení 13. *Nechť X a Y jsou LCS a $L : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak L je spojité, právě když*

$$\forall q \text{ spojitou pseudonormu na } Y\ \exists p \text{ spojitá pseudonorma na } X \quad \forall x \in X : q(L(x)) \le p(x).$$

Pokud $\mathcal{P}$ je systém pseudonorem generující topologii prostoru X a $\mathcal{Q}$ je systém pseudonorem generující topologii prostoru Y, pak je spojitost L ekvivalentní podmínce

$$\forall q \in \mathcal{Q}\,\exists p_1,\dots,p_k \in \mathcal{P}\,\exists c>0\,\forall x \in X : q(L(x)) \le c\cdot\max\{p_1(x),\dots,p_k(x)\}.$$

Tvrzení 14. *Nechť $(X,\mathcal{T})$ je LCS nad $\mathbb{F}$ a $L : X \to \mathbb{F}$ je lineární zobrazení. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *L je spojité.*
(ii) $\ker L$ *je uzavřený podprostor X.*
(iii) *Existuje $U \in \mathcal{T}(\boldsymbol{o})$ takové, že $L(U)$ je omezená množina v $\mathbb{F}$.*

Je-li topologie $\mathcal{T}$ generovaná systémem pseudonorem $\mathcal{P}$, pak je spojitost L dále ekvivalentní podmínce

(iv) $\exists p_1,\dots,p_k \in \mathcal{P}\,\exists c>0\,\forall x \in X : |L(x)| \le c\cdot\max\{p_1(x),\dots,p_k(x)\}$.

Je-li L nespojité, je $\ker L$ *hustý podprostor X.*

Definice. Nechť $(X,\mathcal{T})$ je LCS a $A \subset X$. Množina A je **omezená** v $(X,\mathcal{T})$, pokud pro každé $U \in \mathcal{T}(\boldsymbol{o})$ existuje $\lambda > 0$, pro které $A \subset \lambda U$.

Lemma 15. *Nechť $(X,\mathcal{T})$ je LCS a $A \subset X$. Množina A je omezená v X, právě když každá spojitá pseudonorma p na X je omezená na A. (Podmínku stačí testovat pro nějaký systém pseudonorem generující topologii X.)*

Tvrzení 16. *Nechť* $(X, \mathcal{T})$ *a* $(Y, \mathcal{U})$ *jsou LCS nad* $\mathbb{F}$ *a* $L : X \to Y$ *je lineární zobrazení. Uvažme následující podmínky:*

(i) *L je spojité.*

(ii) *Pro každou $A \subset X$ omezenou je $L(A)$ omezená v Y (tj. L je* **omezené***).*

Pak platí (i)⇒(ii). Je-li topologie $\mathcal{T}$ generována nějakou translačně invariantní metrikou na X, pak (i)⇔(ii).

Poznámky. (1) Z Věty 22 v oddílu V.4 plyne, že je-li LCS $(X, \mathcal{T})$ metrizovatelný, tj. topologie $\mathcal{T}$ je generována nějakou metrikou, pak tuto metriku lze zvolit translačně invariantní.

(2) Ekvivalence v Tvrzení 16 obecně neplatí, což bude plynout z obecné věty, k níž se dostaneme později.

Definice. Nechť $(X, \mathcal{T})$ a $(Y, \mathcal{U})$ jsou LCS nad $\mathbb{F}$ a $L : X \to Y$ je lineární zobrazení. Říkáme, že L je

- **izomorfismus** X **do** Y, je-li L spojité, prosté a L^{-1} je spojité na $L(X)$;
- **izomorfismus** X **na** Y, je-li L spojité, prosté a na a L^{-1} je spojité na Y.

Prostory X a Y jsou **izomorfní**, existuje-li izomorfismus X na Y.

Poznámka: Z tohoto oddílu o obecných TVS platí:

- Tvrzení 12 beze změny, z Tvrzení 14 ekvivalence podmínek (i)–(iii).
- Omezené množiny se definují stejně, Tvrzení 16 platí beze změny.
- Platí i zřejmá analogie poznámky (1) za Tvrzením 16.