VIII.2 Integrovatelnost vektorových funkcí

Definice.

- Nechť $f : \Omega \to X$ je jednoduchá měřitelná funkce tvaru $f = \sum_{j=1}^{k} x_j \chi_{E_j}$ (kde $E_1, \dots, E_k \in \Sigma$ jsou po dvou disjunktní a $x_1, \dots, x_k \in X$). Nechť $E \in \Sigma$ Říkáme, že f je **integrovatelná přes množinu** E, pokud pro každé $j \in \{1, \dots, k\}$ platí $\mu(E \cap E_j) < \infty$ nebo $x_j = \boldsymbol{o}$. **Integrálem funkce** f **přes množinu** E pak rozumíme prvek X definovaný vzorcem
$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{k} \mu(E_j \cap E) x_j,$$
kde používáme konvenci $\infty \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$. Pokud f je integrovatelná přes Ω, říkáme, že je **integrovatelná**.
- Nechť $f : \Omega \to X$ je silně μ-měřitelná. Řekneme, že f je **bochnerovsky integrovatelná**, existuje-li posloupnost (f_n) jednoduchých integrovatelných funkcí, pro kterou platí
$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \,\mathrm{d}\mu(\omega) = 0,$$
kde integrál v tomto vzorci je Lebesgueův. **Bochnerovým integrálem** funkce f pak nazýváme prvek X definovaný vzorcem
$$(B)\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu.$$
- Funkce $f : \Omega \to X$ se nazývá **slabě integrovatelná**, pokud pro každé $\varphi \in X^*$ je $\varphi \circ f$ integrovatelná (i.e., $\varphi \circ f \in L^1(\mu)$).

Tvrzení 7 (základní vlastnosti Bochnerova integrálu).

(a) *Integrovatelné jednoduché funkce tvoří vektorový prostor a zobrazení, které jednoduché integrovatelné funkci f přiřadí její integrál $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$, je lineární.*

(b) *Nechť f je jednoduchá měřitelná funkce. Pak f je integrovatelná, právě když funkce $\omega \mapsto \|f(\omega)\|$ je integrovatelná. Pak platí*
$$\left\| \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \right\| \le \int_\Omega \|f(\omega)\| \,\mathrm{d}\mu(\omega).$$

(c) *Limita definující Bochnerův integrál existuje a nezávisí na volbě posloupnosti (f_n).*

(d) *Bochnerovsky integrovatelné funkce tvoří vektorový prostor a zobrazení, které bochnerovsky integrovatelné funkci přiřadí její Bochnerův integrál, je lineární.*

(e) *Je-li $f : \Omega \to X$ bochnerovsky integrovatelná, pak funkce $\omega \mapsto \|f(\omega)\|$ je integrovatelná a platí*
$$\left\| (B)\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \right\| \le \int_\Omega \|f(\omega)\| \,\mathrm{d}\mu(\omega).$$

(f) *Je-li $f : \Omega \to X$ bochnerovsky integrovatelná, pak pro každou $E \in \Sigma$ je i $\chi_E \cdot f$ bochnerovsky integrovatelná. (Hodnotu $(B)\int_\Omega \chi_E \cdot f \,\mathrm{d}\mu$ pak nazýváme* **Bochnerovým integrálem funkce** f **přes množinu** *E a značíme $(B)\int_E f \,\mathrm{d}\mu$.)*

Věta 8 (charakterizace bochnerovské integrovatelnosti). *Nechť $f : \Omega \to X$ je silně μ-měřitelná funkce. Pak f je bochnerovsky integrovatelná, právě když $\int_\Omega \|f(\omega)\| \,\mathrm{d}\mu(\omega) < \infty$.*

Věta 9 (Lebesgueova věta pro Bochnerův integrál). *Nechť (f_n) je posloupnost bochnerovsky integrovatelných funkcí $f_n : \Omega \to X$, která skoro všude konverguje k funkci $f : \Omega \to X$. Nechť $g : \Omega \to \mathbb{R}$ je integrovatelná funkce a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\|f_n(\omega)\| \le g(\omega)$ pro skoro všechna $\omega \in \Omega$. Pak f je bochnerovsky integrovatelná a platí $(B)\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \lim\limits_{n\to\infty} (B)\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu$.*

Tvrzení 10 (absolutní spojitost Bochnerova integrálu). *Nechť $f : \Omega \to X$ je bochnerovsky integrovatelná. Pak platí:*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall E \in \Sigma : \mu(E) < \delta \Rightarrow \left\| \int_E f \,\mathrm{d}\mu \right\| < \varepsilon.$$

Tvrzení 11 (slabý integrál). *Nechť $f : \Omega \to X$ je slabě integrovatelná. Pak zobrazení*

$$F(\varphi) = \int_\Omega \varphi \circ f \,\mathrm{d}\mu, \quad \varphi \in X^*,$$

je spojitý lineární funkcionál na X^*, tj. $F \in X^{**}$.

Definice, značení a poznámky:

(1) Prvek $F \in X^{**}$ z Tvrzení 11 se nazývá **slabý integrál** (nebo též **Dunfordův integrál**) funkce f, značíme ho $(D) \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$.

(2) Nechť $f : \Omega \to X$ je slabě integrovatelná. Pak pro každou $E \in \Sigma$ je $\chi_E \cdot f$ slabě integrovatelná. Příslušný slabý integrál značíme $(D) \int_E f \,\mathrm{d}\mu$.

(3) Řekneme, že $f : \Omega \to X$ je **pettisovsky integrovatelná**, pokud
- f je slabě integrovatelná, a navíc
- pro každou $E \in \Sigma$ slabý integrál $(D) \int_E f \,\mathrm{d}\mu$ patří do $\varkappa(X)$, kde $\varkappa : X \to X^{**}$ je kanonické vnoření.

Pettisův integrál funkce f **přes** E je pak příslušný prvek X a značí se $(P) \int_E f \,\mathrm{d}\mu$. Tj. pro $x \in X$ pak platí

$$x = (P) \int_E f \,\mathrm{d}\mu \Leftrightarrow \forall \varphi \in X^* : \varphi(x) = \int_E \varphi \circ f \,\mathrm{d}\mu.$$

Poznámky:

(1) K tomu, aby f byla pettisovsky integrovatelná, je nutné, aby $(D) \int_E f \,\mathrm{d}\mu \in \varkappa(X)$ pro každé $E \in \Sigma$. Nestačí, aby to bylo splněno pro $E = \Omega$.

(2) Slabě integrovatelná funkce nemusí být pettisovsky integrovatelná.

(3) Petisovsky integrovatelná funkce nemusí být silně μ-měřitelná. Například funkce z Příkladu 6(1) je pettisovsky integrovatelná, její integrál je nulový, ale není esenciálně separabilně hodnotová.

(4) Každá bochnerovsky integrovatelná funkce je pettisovsky integrovatelná (to plyne z Tvrzení 12 níže), obrácená implikace neplatí ani pro silně μ-měřitelné funkce (viz Příklad 13 níže).

Tvrzení 12 (Bochnerův integrál a omezený operátor). *Nechť $f : \Omega \to X$ je bochnerovsky integrovatelná, Y je Banachův prostor a $L : X \to Y$ spojitý lineární operátor. Pak $L \circ f$ je bochnerovsky integrovatelná a navíc*

$$(B) \int_\Omega L \circ f \,\mathrm{d}\mu = L\left((B) \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \right).$$

Poznámka: Předchozí tvrzení jednak ukazuje, že bochnerovská integrovatelnost implikuje pettisovskou, a také lze využít k výpočtu Bochnerova integrálu: K tomu je třeba ukázat, že Bochnerův integrál existuje, jeho hodnotu lze pak počítat s využitím vhodných funkcionálů či operátorů.

Příklad 13. *Nechť $\Omega = \mathbb{N}$, Σ je σ-algebra všech podmnožin $\mathbb{N}$, μ je sčítací míra a $f : \Omega \to X$. Pak platí:*

(a) *f je bochnerovsky integrovatelná, právě když řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ je absolutně konvergentní. Bochnerův integrál je pak roven součtu řady.*

(b) *Je-li řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ bezpodmínečně konvergentní, je f pettisovsky integrovatelná a její Pettisův integrál je roven součtu řady.*

Poznámka: V bodě (b) Příkladu 13 platí i obrácená implikace – je-li f pettisovsky integrovatelná, je řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ bezpodmínečně konvergentní. Důkaz je však obtížnější, tvrzení je obsahem Orlicz-Pettisovy věty.