# VIII. Základy vektorové integrace

**Úmluva:** V této kapitole budeme používat následující značení:

- $(M, \mathcal{A})$ je pevně zvolený měřitelný prostor, tj. $M$ je nějaká neprázdná množina a $\mathcal{A}$ je nějaká $\sigma$-algebra podmnožin $M$.
- $(\Omega, \Sigma, \mu)$ je pevně zvolený prostor s úplnou nezápornou $\sigma$-aditivní mírou, tj. $\Omega$ je nějaká neprázdná množina, $\Sigma$ nějaká $\sigma$-algebra podmnožin $\Omega$ a $\mu$ je nezáporná $\sigma$-aditivní míra na $\Sigma$, která je navíc úplná.
- $X$ je pevně zvolený Banachův prostor nad $\mathbb{F}$.

**Poznámky:**

(1) $(\Omega, \Sigma)$ je speciální případ měřitelného prostoru. Proto vše, co je níže uvedeno pro prostor $(M, \mathcal{A})$, lze aplikovat i na prostor $(\Omega, \Sigma)$.
(2) Apriori nepředpokládáme, že míra $\mu$ je konečná či $\sigma$-konečná, i když to jsou samozřejmě nejdůležitější případy.

## VIII.1 Měřitelnost vektorových funkcí

**Definice.** Nechť $f : M \to X$ je zobrazení. Říkáme, že funkce $f$ je

- **jednoduchá**, pokud obor hodnot je konečná množina, tj. pokud $f = \sum_{j=1}^{k} x_j \chi_{A_j}$, kde $x_1, \dots, x_k \in X$ a $A_1, \dots, A_k$ jsou neprázdné po dvou disjunktní podmnožiny $M$;
- **jednoduchá měřitelná**, pokud lze vyjádřit ve tvaru z předchozího bodu a navíc $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$;
- **(silně) $\mathcal{A}$-měřitelná**, pokud existuje posloupnost $(u_n)$ jednoduchých měřitelných funkcí, která bodově konverguje k $f$ (tj. pro každé $t \in M$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n(t) - f(t)\| = 0$);
- **borelovsky $\mathcal{A}$-měřitelná**, pokud pro každou $U \subset X$ otevřenou platí $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$;
- **slabě $\mathcal{A}$-měřitelná**, pokud pro každé $\varphi \in X^*$ je funkce $\varphi \circ f : M \to \mathbb{F}$ (borelovsky) $\mathcal{A}$-měřitelná.

**Větička 1.**

(a) *Jednoduché funkce, jednoduché měřitelné funkce, silně $\mathcal{A}$-měřitelné funkce a slabě $\mathcal{A}$-měřitelné funkce tvoří vektorový prostor.*
(b) *Nechť $(f_n)$ je posloupnost funkcí $f_n : M \to X$, která bodově konverguje k funkci $f : M \to X$. Pokud jsou všechny funkce $f_n$ borelovsky $\mathcal{A}$-měřitelné (resp. slabě $\mathcal{A}$-měřitelné), má příslušnou vlastnost i $f$.*
(c) *Nechť $f : M \to X$ je funkce. Pak platí*

$$f \text{ silně } \mathcal{A}\text{-měřitelná} \Rightarrow f \text{ borelovsky } \mathcal{A}\text{-měřitelná} \Rightarrow f \text{ slabě } \mathcal{A}\text{-měřitelná}.$$

*Pro jednoduché funkce všechny uvedené druhy měřitelnosti splývají.*
(d) *Je-li $f : M \to X$ silně $\mathcal{A}$-měřitelná, pak $f(M)$ je separabilní podmnožina $X$.*
(e) *Je-li $f : M \to X$ borelovsky $\mathcal{A}$-měřitelná, pak $t \mapsto \|f(t)\|$ je $\mathcal{A}$-měřitelná (skalární) funkce.*

**Poznámky:**

(1) Borelovsky $\mathcal{A}$-měřitelné funkce tvoří vektorový prostor, pokud $X$ je separabilní (to plyne z Věty 3 níže), obecně vektorový prostor tvořit nemusí.
(2) V bodě (c) obrácené implikace neplatí, viz Příklady 6 níže.

**Lemma 2.** *Nechť $(f_n)$ je posloupnost silně $\mathcal{A}$-měřitelných funkcí $f_n : M \to X$, která bodově konverguje k funkci $f : M \to X$. Pak i $f$ je silně $\mathcal{A}$-měřitelná.*

**Věta 3** (Pettisova). *Nechť $f : M \to X$ je funkce. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *$f$ je silně $\mathcal{A}$-měřitelná.*
(ii) *$f$ je borelovsky $\mathcal{A}$-měřitelná a $f(M)$ je separabilní podmnožina $X$.*
(iii) *$f$ je slabě $\mathcal{A}$-měřitelná a $f(M)$ je separabilní podmnožina $X$.*

**Definice.** Nechť $f : \Omega \to X$ je zobrazení. Říkáme, že funkce $f$ je

- **(silně) $\mu$-měřitelná**, pokud existuje posloupnost $(u_n)$ jednoduchých měřitelných funkcí $u_n : \Omega \to X$, která konverguje k $f$ skoro všude (tj. pro skoro všechna $\omega \in \Omega$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n(\omega) - f(\omega)\| = 0$);
- **borelovsky $\mu$-měřitelná** (resp. **slabě $\mu$-měřitelná**), pokud je borelovsky $\Sigma$-měřitelná (resp. slabě $\Sigma$-měřitelná).

**Poznámky:**

(1) Nechť $f : \Omega \to X$ je funkce. Pak platí:

$$f \text{ silně } \mu\text{-měřitelná } \Rightarrow f \text{ borelovsky } \mu\text{-měřitelná } \Rightarrow f \text{ slabě } \mu\text{-měřitelná}$$

(2) Je-li $f : \Omega \to X$ (silně) $\mu$-měřitelná, pak

$$\exists Y \subset\subset X \text{ separabilní } \exists N \in \Sigma : \mu(N) = 0 \;\&\; f(\Omega \setminus N) \subset Y.$$

Funkce, která splňuje tuto podmínku, se nazývá **esenciálně separabilně hodnotová**.

**Lemma 4.** *Nechť $(f_n)$ je posloupnost silně $\mu$-měřitelných funkcí $f_n : M \to X$, která skoro všude konverguje k funkci $f : M \to X$. Pak i $f$ je silně $\mu$-měřitelná.*

**Věta 5** (Pettisova). *Nechť $f : \Omega \to X$ je funkce. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *$f$ je silně $\mu$-měřitelná.*
(ii) *$f$ je borelovsky $\mu$-měřitelná a esenciálně separabilně hodnotová.*
(iii) *$f$ je slabě $\mu$-měřitelná a esenciálně separabilně hodnotová.*

**Příklady 6.**

(1) *Nechť $\Omega = [0,1]$, $\mu$ je Lebesgueova míra na $[0,1]$ a $\Sigma$ je $\sigma$-algebra všech lebesgueovsky měřitelných podmnožin $[0,1]$. Uvažme funkci $f : [0,1] \to \ell^2([0,1])$ definovanou předpisem $f(t) = \boldsymbol{e}_t$, $t \in [0,1]$, kde $\boldsymbol{e}_t$ označuje příslušný kanonický jednotkový vektor.*

*Pak $f$ je slabě $\mu$-měřitelná, není esenciálně separabilně hodnotová, tedy není silně $\mu$-měřitelná. Dokonce není ani borelovsky $\mu$-měřitelná.*

(2) *Nechť $(\Omega, \Sigma, \mu)$ a $f$ jsou jako v bodě (1). Nechť navíc $h : [0,1] \to [0,\infty)$ je libovolná funkce. Pak i funkce $h \cdot f$ je slabě $\mu$-měřitelná. Přitom pro každé $t \in [0,1]$ platí $\|h(t)f(t)\| = h(t)$. Tedy, je-li $h$ neměřitelná, pak $g = h \cdot f$ je slabě $\mu$-měřitelná, ale funkce $t \mapsto \|g(t)\|$ není měřitelná.*

(3) *Nechť $\Omega = [0,1]$, $\Sigma$ je $\sigma$-algebra všech podmnožin $[0,1]$, $\mu$ je sčítací míra a $f$ je stejného tvaru jako v bodě (1). Pak $f$ je borelovsky $\mu$-měřitelná, není esenciálně separabilně hodnotová, tedy není silně $\mu$-měřitelná.*

**Poznámka:** Otázka, zda pro konečnou míru $\mu$ je každá borelovsky $\mu$-měřitelná funkce esenciálně separabilně hodnotová (a tedy silně $\mu$-měřitelná), je složitější. Odpověď závisí na dodatečných axiómech teorie množin.