VII.4 Konvoluce distribucí

Značení. Nechť $M \subset \mathbb{R}^d$ a $f : M \to \mathbb{F}$ je funkce.

- Pro $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ definujme funkci $\tau_{\boldsymbol{y}} f$ (tzv. **posun** funkce f) vzorcem
$$(\tau_{\boldsymbol{y}} f)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{y} + M.$$
- **Otočením** funkce f budeme rozumět funkci $\check{f}$ definovanou vzorcem
$$\check{f}(\boldsymbol{x}) = f(-\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in -M.$$
- Pro $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^d$, definujeme $\partial_{\boldsymbol{e}} f(\boldsymbol{a}) = \lim\limits_{r \to 0} \dfrac{f(\boldsymbol{a} + r\boldsymbol{e}) - f(\boldsymbol{a})}{r}$, pokud limita existuje. (Jestliže $\boldsymbol{e}$ je jednotkový vektor, jde o derivaci funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ ve směru $\boldsymbol{e}$.)

Lemma 13. *Nechť $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.*

(a) *Je-li $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$ v $\mathbb{R}^d$, pak $\tau_{\boldsymbol{x}_n} \varphi \to \tau_{\boldsymbol{x}} \varphi$ v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.*

(b) *Nechť $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^d$. Pak $\partial_{\boldsymbol{e}} \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Navíc, pokud pro $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definujeme funkci φ_r předpisem*
$$\varphi_r(\boldsymbol{x}) = \tfrac{1}{r}(\varphi(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{e}) - \varphi(\boldsymbol{x})), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,$$
tj. $\varphi_r = \frac{1}{r}(\tau_{-r\boldsymbol{e}} \varphi - \varphi)$, pak $\varphi_r \to \partial_{\boldsymbol{e}} \varphi$ v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ pro $r \to 0$.

Tvrzení 14. *Nechť $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2})$.*

(a) *Nechť $\Lambda \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{d_1})$. Pro $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{d_2}$ definujme $\psi(\boldsymbol{y}) = \Lambda(\boldsymbol{x} \mapsto \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$. Pak $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{d_2})$ a pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^{d_2}$ platí $D^\alpha \psi(\boldsymbol{y}) = \Lambda(\boldsymbol{x} \mapsto D^{(\boldsymbol{o}, \alpha)} \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$ pro $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{d_2}$.*

(b) (Fubiniova věta pro distribuce) *Nechť $\Lambda_1 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{d_1})$ a $\Lambda_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{d_2})$. Pak*
$$\Lambda_2(\boldsymbol{y} \mapsto \Lambda_1(\boldsymbol{x} \mapsto \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))) = \Lambda_1(\boldsymbol{x} \mapsto \Lambda_2(\boldsymbol{y} \mapsto \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))).$$

Definice. Nechť U je distribuce na $\mathbb{R}^d$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. **Konvolucí funkce φ a distribuce U** rozumíme funkci $U * \varphi$ definovanou vzorcem
$$U * \varphi(\boldsymbol{x}) = U(\tau_{\boldsymbol{x}} \check{\varphi}) = U(\boldsymbol{y} \mapsto \varphi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Poznámka: Protože $\tau_{\boldsymbol{x}} \check{\varphi} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ kdykoli $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, je $U * \varphi$ dobře definovaná funkce na $\mathbb{R}^d$.

Věta 15 (o konvoluci distribuce a testovací funkce). *Nechť U je distribuce na $\mathbb{R}^d$ a $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Pak platí:*

(a) *Je-li $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, pak $\Lambda_f * \varphi = f * \varphi$.*

(b) *$U * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ a pro každý multiindex α platí*
$$D^\alpha(U * \varphi) = (D^\alpha U) * \varphi = U * D^\alpha \varphi.$$

(c) $\operatorname{spt}(U * \varphi) \subset \operatorname{spt} U + \operatorname{spt} \varphi$. *Speciálně, má-li U kompaktní nosič, pak $U * \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.*

(d) *Je-li (h_j) aproximativní jednotka v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $\Lambda_{U * h_j} \to U$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$.*

(e) *Pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ je $\tau_{\boldsymbol{x}}(U * \varphi) = (\tau_{\boldsymbol{x}} U) * \varphi = U * \tau_{\boldsymbol{x}} \varphi$.*

(f) *$U * (\varphi * \psi) = (U * \varphi) * \psi$.*

Značení. Je-li U distribuce na $\mathbb{R}^d$,

- jejím **posunem o $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$** rozumíme zobrazení $\tau_{\boldsymbol{x}} U$ definované vzorcem
$$\tau_{\boldsymbol{x}} U(\varphi) = U(\tau_{-\boldsymbol{x}} \varphi) = U(\boldsymbol{y} \mapsto \varphi(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x})), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d);$$
- jejím **otočením** rozumíme zobrazení $\check{U}$ definované vzorcem
$$\check{U}(\varphi) = U(\check{\varphi}) = U(\boldsymbol{y} \mapsto \varphi(-\boldsymbol{y})), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d).$$

Poznámka. Je-li U distribuce na $\mathbb{R}^d$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, pak $\tau_{\boldsymbol{x}} U$ i $\check{U}$ jsou také distribuce na $\mathbb{R}^d$. Je-li $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, pak $\tau_{\boldsymbol{x}} \Lambda_f = \Lambda_{\tau_{\boldsymbol{x}} f}$ a $\overset{\vee}{\Lambda_f} = \Lambda_{\check{f}}$.

Poznámka o konvoluci dvou distribucí: Nechť U a V jsou dvě distribuce na $\mathbb{R}^d$. Bylo by přirozené definovat jejich konvoluci předpisem

$$(U * V)(\varphi) = U(\check{V} * \varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d).$$

Pokud totiž $V = \Lambda_\psi$, kde $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, pak z Tvrzení 14(b) plyne

$$\Lambda_{U*\psi}(\varphi) = U(\check{\psi} * \varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d).$$

Konvoluci v takovéto obecnosti ovšem definovat nelze, protože $\check{V} * \varphi$ nemusí patřit do $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ (je to funkce třídy C^∞, ale nemusí mít kompaktní nosič). Nicméně v některých speciálních případech uvedený vzorec smysluplnou definici dává. Může to být způsobeno zejména některým z následujících důvodů:

- Ze speciálních vlastností V může plynout, že $\check{V} * \varphi$ musí mít kompaktní nosič.
- Ze speciálních vlastností U může plynout, že U lze přirozeně rozšířit na prostor všech C^∞ funkcí.
- Kombinace předchozích dvou možností: Ze speciálních vlastností U a V plyne, že U lze přirozeně rozšířit na větší prostor a přitom $\check{V} * \varphi$ musí patřit do tohoto prostoru.

Příklady situací, kdy je konvoluce $U * V$ dobře definována výše uvedeným vzorcem:

(1) V má kompaktní nosič: Pak pro každou $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ má $\check{V} * \varphi$ kompaktní nosič (viz Věta 15(c)).

(2) U má kompaktní nosič: Pak zvolíme nezápornou funkci $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, která je konstantně rovna jedné na nějaké otevřené množině obsahující $\operatorname{spt} U$. Následně U lze rozšíříme na $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ pomocí vzorce $\widetilde{U}(f) = U(\psi f)$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(3) Pro každé $r > 0$ je $(\overline{U(\boldsymbol{o}, r)} - \operatorname{spt} V) \cap \operatorname{spt} U$ kompaktní: Pro $r > 0$ zvolíme nezápornou funkci $\psi_r \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, která je konstantně rovna jedné na nějaké otevřené množině obsahující $(\overline{U(\boldsymbol{o}, r)} - \operatorname{spt} V) \cap \operatorname{spt} U$. Pak U rozšíříme na prostor

$$\{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d); \exists r > 0 \colon \operatorname{spt} f \subset \overline{U(\boldsymbol{o}, r)} - \operatorname{spt} V\}$$

předpisem

$$\widetilde{U}(f) = U(\psi_r f), \quad \operatorname{spt} f \subset \overline{U(\boldsymbol{o}, r)} - \operatorname{spt} V.$$

(4) Předpokládejme, že existují $m, n \in \mathbb{N}_0$ a $c, d > 0$, že

$$|U(\varphi)| \le c\,\|\varphi\|_n \text{ a } |V(\varphi)| \le d\,\|\varphi\|_m \text{ pro } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d).$$

Pak U lze kanonicky spojitě rozšířit na prostor

$$\{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d); \|f\|_n < \infty\}$$

a pro každé $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ platí $\left\|\check{V} * \varphi\right\|_n \le d\,\|\varphi\|_{m+n}$. Tedy $U * V$ lze přirozeně definovat a výsledná distribuce splňuje

$$|(U * V)(\varphi)| \le cd\,\|\varphi\|_{m+n} \text{ pro } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d).$$

Tvrzení 16. *Nechť U a V jsou distribuce na $\mathbb{R}^d$ splňující předpoklady jedné z výše uvedených situací. Pak platí:*

(a) *$U * V$ je distribuce na $\mathbb{R}^d$ a platí $U * V = V * U$.*

(b) *Pokud $V = \Lambda_\varphi$ pro nějakou $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $U * V = \Lambda_{U*\varphi}$.*

(c) *Pokud $U = \Lambda_f$ a $V = \Lambda_\varphi$, kde $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $U * V = \Lambda_{f*\varphi}$.*

(d) *Pokud $U = \Lambda_f$ a $V = \Lambda_g$, kde $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pak $U * V = \Lambda_{f*g}$.*

(e) *$\operatorname{spt}(U * V) \subset \operatorname{spt} U + \operatorname{spt} V$. Speciálně, mají-li U i V kompaktní nosič, má i $U * V$ kompaktní nosič.*

(f) *Pro každý multiindex α platí*

$$D^\alpha(U * V) = (D^\alpha U) * V = U * D^\alpha V.$$

(g) *$U = U * \Lambda_{\delta_0}$ a $D^\alpha U = U * D^\alpha \Lambda_{\delta_0}$ pro každý multiindex α.*