VII.3 Další vlastnosti distribucí

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina. Řekneme, že posloupnost (Λ_n) v $\mathscr{D}'(\Omega)$ **konverguje** k distribuci Λ, pokud konverguje bodově na $\mathscr{D}(\Omega)$, tj. pokud $\Lambda_n(\varphi) \to \Lambda(\varphi)$ pro každé $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Větička 10 (o konvergenci distribucí). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina. Pak platí:*

(a) *Je-li (Λ_n) je posloupnost distribucí na Ω, která konverguje k distribuci Λ, pak*
  - *pro každý multiindex α je $D^\alpha \Lambda_n \to D^\alpha \Lambda$,*
  - *pro každou $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ je $f\Lambda_n \to f\Lambda$.*

(b) *Je-li (f_n) posloupnost v $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ konvergující v $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ k funkci f, tj.,*
$$\int_K |f_n - f| \to 0 \text{ pro každou kompaktní } K \subset \Omega,$$
pak $\Lambda_{f_n} \to \Lambda_f$.

(c) *Je-li $p \in [1, \infty]$ a (f_n) posloupnost v $L^p(\Omega)$ konvergující v $L^p(\Omega)$ k funkci f, pak $\Lambda_{f_n} \to \Lambda_f$.*

(d) *Je-li (φ_n) posloupnost v $\mathscr{D}(\Omega)$ konvergující v $\mathscr{D}(\Omega)$ k funkci φ, pak $\Lambda_{\varphi_n} \to \Lambda_\varphi$.*

Věta 11 (Banach-Steinhausova věta pro distribuce). *Nechť (Λ_n) je posloupnost distribucí na Ω taková, že pro každou $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ posloupnost $(\Lambda_n(\varphi))$ konverguje. Označíme-li $\Lambda(\varphi) = \lim_n \Lambda_n(\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, pak $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$.*

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina a Λ je distribuce na Ω.

- Nechť $G \subset \Omega$ je otevřená. Řekneme, že Λ je **nulová na** G, jestliže $\Lambda(\varphi) = 0$ pro každou $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ splňující $\operatorname{spt}\varphi \subset G$.
- **Nosičem** distribuce Λ rozumíme množinu
$$\begin{aligned}\operatorname{spt}\Lambda &= \Omega \setminus \bigcup\{G \subset \Omega \text{ otevřená}; \Lambda \text{ je nulová na } G\}\\ &= \{x \in \Omega; \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \operatorname{spt}\varphi \subset U(x, \varepsilon) \;\&\; \Lambda(\varphi) \neq 0\}\end{aligned}$$
- Říkáme, že Λ **má kompaktní nosič**, je-li $\operatorname{spt}\Lambda$ kompaktní podmnožina Ω.

Větička 12 (o nosiči distribuce). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina a Λ je distribuce na Ω. Pak platí:*

(a) *Pokud $\Lambda = \Lambda_f$ pro $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, pak $\operatorname{spt}\Lambda = \operatorname{spt} f$, kde*
$$\operatorname{spt} f = \{\boldsymbol{x} \in \Omega; \lambda^d(\{\boldsymbol{y} \in U(\boldsymbol{x}, \varepsilon); f(\boldsymbol{y}) \neq 0\}) > 0 \text{ pro každé } \varepsilon > 0\}.$$
Je-li f spojitá, splývá tato množina s dříve definovaným $\operatorname{spt} f$.

(b) *Pokud $\Lambda = \Lambda_\mu$ pro nějakou míru μ, pak $\operatorname{spt}\Lambda = \operatorname{spt}\mu$, kde*
$$\operatorname{spt}\mu = \Omega \setminus \{G \subset \Omega \text{ otevřená}; \mu(A) = 0 \text{ pro každou } A \subset G \text{ borelovskou}\}.$$

(c) *Pokud $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ splňuje $\operatorname{spt}\varphi \cap \operatorname{spt}\Lambda = \emptyset$, pak $\Lambda(\varphi) = 0$.*

(d) *Má-li Λ kompaktní nosič, pak existují taková $N \in \mathbb{N}_0$ a $C > 0$, že platí*
$$|\Lambda(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_N \text{ pro každé } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$
Speciálně, Λ je konečného řádu.

(e) *$\operatorname{spt}\Lambda$ je jednobodová množina $\{p\}$, právě když existuje $N \in \mathbb{N}_0$ a čísla c_α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leq N$, ne všechna nulová, že platí*
$$\Lambda = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \leq N} c_\alpha D^\alpha \Lambda_{\delta_p},$$
tj. existují čísla d_α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leq N$, ne všechna nulová, že platí
$$\Lambda(\varphi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \leq N} d_\alpha D^\alpha \varphi(p), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$