IV.2 Distribuce, základní vlastnosti a operace

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina, (φ_n) posloupnost v $\mathscr{D}(\Omega)$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Řekneme, že posloupnost (φ_n) **konverguje k φ v $\mathscr{D}(\Omega)$**, pokud jsou splněny následující dvě podmínky:

- Existuje $K \subset \Omega$ kompaktní taková, že $\operatorname{spt} \varphi_n \subset K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
- Pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ platí $D^\alpha \varphi_n \rightrightarrows D^\alpha \varphi$ na K.

Tuto skutečnost zkráceně zapisujeme $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathscr{D}(\Omega)$.

Poznámka. Nechť $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ je multiindex.

- Pokud $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, pak $D^\alpha \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.
- Pokud $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathscr{D}(\Omega)$, pak $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ v $\mathscr{D}(\Omega)$.

Značení: Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina.

- Pro $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ a $N \in \mathbb{N}_0$ označme

$$\|\varphi\|_N = \max\{\|D^\alpha \varphi\|_\infty ; \alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \le N\} = \sup\{|D^\alpha \varphi(x)| ; x \in \Omega, \alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \le N\}.$$

- Je-li $K \subset \Omega$ kompaktní podmnožina, položme

$$\mathscr{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathscr{D}(\Omega); \operatorname{spt} \varphi \subset K\}.$$

Lemma 5. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina.*

(a) *Pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ je $\|\cdot\|_N$ norma na $\mathscr{D}(\Omega)$.*
(b) *Je-li $K \subset \Omega$ kompaktní podmnožina, pak prostor $\mathscr{D}_K(\Omega)$ s posloupností norem $(\|\cdot\|_N)$ je Fréchetův prostor.*

Tvrzení 6. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina a $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{F}$ je lineární funkcionál. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) $\forall (\varphi_n) \subset \mathscr{D}(\Omega)\ \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \varphi_n \to \varphi$ v $\mathscr{D}(\Omega) \Rightarrow \Lambda(\varphi_n) \to \Lambda(\varphi)$.
(2) $\forall (\varphi_n) \subset \mathscr{D}(\Omega)\ \varphi_n \to 0$ v $\mathscr{D}(\Omega) \Rightarrow \Lambda(\varphi_n) \to 0$.
(3) *Pro každou $K \subset \Omega$ kompaktní je restrikce $\Lambda|_{\mathscr{D}_K(\Omega)}$ spojitá na $\mathscr{D}_K(\Omega)$.*
(4) *Pro každou kompaktní podmnožinu $K \subset \Omega$ existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C > 0$ tak, že*

$$|\Lambda(\varphi)| \le C \|\varphi\|_N, \quad \varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega).$$

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina.

- **Distribucí** na Ω rozumíme lineární funkcionál $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{F}$ splňující ekvivalentní podmínky z Tvrzení 6.
- Prostor všech distribucí na Ω značíme $\mathscr{D}'(\Omega)$.
- Distribuce Λ na Ω je **konečného řádu**, pokud v podmínce (3) z Tvrzení 6 můžeme číslo $N \in \mathbb{N}_0$ volit nezávislé na K. Nejmenší možné takové N pak nazýváme **řád distribuce** Λ.

Příklady 7. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina.*

(1) *Je-li $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, definujme*

$$\Lambda_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Pak Λ_f je distribuce řádu 0 na Ω. Říkáme jí **regulární distribuce generovaná** f.

(2) *Je-li μ nezáporná regulární borelovská míra na Ω, která je konečná na kompaktních podmnožinách Ω, pak*

$$\Lambda_\mu(\varphi) = \int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

je distribuce řádu 0 na Ω.

(3) *Je-li μ konečná znaménková nebo komplexní regulární borelovská míra na Ω, pak zobrazení Λ_μ definované stejným vzorcem jako v předchozím bodě je distribuce řádu 0 na Ω.*

(4) *Zobrazení*

$$\Lambda(\varphi) = \varphi'(0), \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}),$$

je distribuce řádu 1 na $\mathbb{R}$. Tato distribuce není tvaru Λ_f ani Λ_μ z předchozích bodů.

(5) *Zobrazení*

$$\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n), \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}),$$

je distribuce na $\mathbb{R}$, která není konečného řádu.

Poznámky. Z Lemmatu 2 plynou následující tvrzení:

- Pokud pro $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ platí $\Lambda_f = \Lambda_g$, pak $f = g$ skoro všude na Ω. To ospravedlňuje skutečnost, že distribucím se někdy říká **zobecněné funkce**.
- Jsou-li μ a ν dvě míry, pro které platí $\Lambda_\mu = \Lambda_\nu$, pak $\mu = \nu$.
- Je-li $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ a μ míra, pro které platí $\Lambda_f = \Lambda_\mu$, pak $\mu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\lambda^d$ pro každou $A \subset \Omega$ borelovskou.

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina a Λ je distribuce na Ω.

- Je-li $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ multiindex, pak α-**tou derivací distribuce** Λ rozumíme zobrazení $D^\alpha\Lambda$ definované předpisem
$$D^\alpha\Lambda(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$
- Je-li $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, pak **násobkem distribuce** Λ **funkcí** f rozumíme zobrazení $f\Lambda$ definované předpisem
$$(f\Lambda)(\varphi) = \Lambda(f\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Poznámka. V případě, že $d = 1$, pak místo $D^1\Lambda$ píšeme Λ', místo $D^2\Lambda$ píšeme Λ'' a obecně místo $D^n\Lambda$ píšeme $\Lambda^{(n)}$.

Větička 8. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina. Pak platí:*

(a) *Pro každou $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ a každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ je $D^\alpha\Lambda$ také distribuce na Ω.*
(b) *Pro každou $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ je $D^\alpha\Lambda_f = \Lambda_{D^\alpha f}$.*
(c) *Je-li $d = 1$, $\Omega = (a, b)$ a $f \in L^1_{\mathrm{loc}}((a, b))$, pak*
   - *$(\Lambda_f)' = \Lambda_g$ (kde $g \in L^1_{\mathrm{loc}}((a, b))$), právě když funkce g je slabou derivací funkce f;*
   - *$(\Lambda_f)' = \Lambda_\mu$ (kde μ je konečná míra), právě když míra μ je slabou derivací funkce f.*

(d) *Je-li $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ a $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, pak $f\Lambda$ je distribuce na Ω.*
(e) *Je-li $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ a $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, pak $f\Lambda_g = \Lambda_{fg}$.*

Tvrzení 9.

(a) *Nechť $\Lambda \in \mathscr{D}'((a, b))$ a $\Lambda' = 0$. Pak existuje $c \in \mathbb{F}$, že $\Lambda = \Lambda_c$.*
(b) *Obecněji, je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená souvislá a $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ takvá, že $D^\alpha\Lambda = 0$ pro každý multiindex α splňující $|\alpha| = 1$, pak existuje $c \in \mathbb{F}$, že $\Lambda = \Lambda_c$.*