VII. Základy teorie distribucí

VII.1 Prostor testovacích funkcí a slabé derivace

Značení (připomenutí z Kapitoly IV):

- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Prvky $\mathbb{N}_0^d$ nazýváme **multiindexy**. Pro $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ značíme $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$. Toto číslo nazýváme **řádem multiindexu** α.
- Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{F})$ a $\boldsymbol{a} \in \Omega$, pak
$$D^\alpha f(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}(\boldsymbol{a}).$$

Definice. Nechť $d \in \mathbb{N}$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina.

(a) Je-li $f : \Omega \to \mathbb{F}$ spojitá, pak jejím **nosičem** rozumíme množinu
$$\operatorname{spt} f = \overline{\{\boldsymbol{x} \in \Omega; f(\boldsymbol{x}) \neq 0\}},$$
kde uzávěr se bere v Ω.

(b) Označme
$$\mathscr{D}(\Omega, \mathbb{F}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{F}); \operatorname{spt} f \text{ je kompaktní podmnožina } \Omega\}.$$
Prvky $\mathscr{D}(\Omega, \mathbb{F})$ nazýváme **testovací funkce**, prostor $\mathscr{D}(\Omega, \mathbb{F})$ pak nazýváme **prostorem testovacích funkcí**.

(c) Měřitelnou funkci $f : \Omega \to \mathbb{F}$ nazýváme **lokálně integrovatelnou v** Ω, jestliže pro každé $\boldsymbol{x} \in \Omega$ existuje takové $r > 0$, že f je lebesguovsky integrovatelná na $U(\boldsymbol{x}, r)$ (tj. $\int_{U(\boldsymbol{x},r)} |f| < \infty$). Prostor všech lokálně integrovatelných funkcí v Ω značíme $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{F})$. (Přesněji jde o prostor tříd ekvivalence, kdy ztotožňujeme funkce, které se rovnají skoro všude.)

(d) Zvolme nezápornou $h \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, pro kterou platí $\operatorname{spt} \varphi \subset U(0, 1)$ a $\int_{\mathbb{R}^d} h = 1$. Pro $j \in \mathbb{N}$ definujme funkci h_j předpisem
$$h_j(\boldsymbol{x}) = j^d h(j\boldsymbol{x}) \text{ pro } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$
Posloupnost (h_j), která takto vznikne, nazýváme **aproximativní jednotkou** v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ nebo též **zhlazovacím jádrem**.

Lemma 1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená. Pak pro $p \in [1, \infty)$ je $\mathscr{D}(\Omega)$ hustý podprostor $L^p(\Omega)$.*

Lemma 2. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina.*

- *Nechť μ je (konečná) znaménková či komplexní regulární borelovská míra na Ω. Pokud pro každou $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ platí $\int_\Omega \varphi \, \mathrm{d}\mu = 0$, pak $\mu = 0$.*
- *Nechť $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ a pro každou $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ platí $\int_\Omega f\varphi = 0$. Pak $f = 0$ skoro všude na Ω.*

Definice. Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a $f \in L^1_{\mathrm{loc}}((a, b))$.

- Funkce $g \in L^1_{\mathrm{loc}}((a, b))$ se nazývá **slabou derivací** funkce f, pokud pro každou $\varphi \in \mathscr{D}((a, b))$ platí
$$\int_a^b f\varphi' = -\int_a^b g\varphi.$$
- Nechť μ je konečná regulární borelovská míra na (a, b) (znaménková či komplexní). Říkáme, že míra μ je **slabou derivací** funkce f, pokud pro každou $\varphi \in \mathscr{D}((a, b))$ platí
$$\int_a^b f\varphi' = -\int_{(a,b)} \varphi \, \mathrm{d}\mu.$$

Tvrzení 3. *Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a $f \in L^1_{\mathrm{loc}}((a, b))$. Pokud pro každou $\varphi \in \mathscr{D}((a, b))$ platí $\int_a^b f\varphi' = 0$, je funkce f konstantní (tj. existuje konstanta c, pro kterou $f = c$ skoro všude na (a, b)).*

Jinými slovy: Je-li slabou derivací funkce $f \in L^1_{\mathrm{loc}}((a, b))$ nulová funkce, je f konstantní (ve výše uvedeném smyslu).

Věta 4. *Nechť $f \in L^1_{\mathrm{loc}}((a, b))$.*

(a) *Slabá derivace f je jednoznačně určena. Tj., jsou-li dvě funkce $g_1, g_2 \in L^1_{\mathrm{loc}}((a, b))$ slabou derivací funkce f, pak $g_1 = g_2$ skoro všude. Podobně, jsou-li dvě míry μ_1, μ_2 slabou derivací funkce f, pak $\mu_1 = \mu_2$.*

(b) *Je-li f absolutně spojitá na $[a, b]$, pak má vlastní derivaci skoro všude, $f' \in L^1((a, b))$ a f' je slabou derivací funkce f.*
Obráceně, má-li funkce f má slabou derivaci $g \in L^1((a, b))$, pak existuje funkce f_0 absolutně spojitá na $[a, b]$, která se rovná f skoro všude na (a, b). V tom případě $g = f_0'$ skoro všude.
Obecněji, funkce f má slabou derivaci v $L^1_{\mathrm{loc}}((a, b))$, právě když existuje funkce f_0 lokálně absolutně spojitá na (a, b) (tj. absolutně spojitá na každém uzavřeném podintervalu $[c, d] \subset (a, b)$) taková, že $f_0 = f$ skoro všude.

(c) *Existuje konečná míra μ, která je slabou derivací funkce f, právě když existuje funkce f_0 konečné variace na $[a, b]$ taková, že $f_0 = f$ skoro všude na (a, b). V tom případě pro každý podinterval $(c, d) \subset (a, b)$ platí*
$$\mu((c, d)) = \lim_{x \to d-} f_0(x) - \lim_{x \to c+} f_0(x).$$
Navíc, μ je reálná, právě když f_0 lze volit reálnou, a μ je nezáporná, právě když f_0 lze volit neklesající.