V. Lokálně konvexní prostory

Základní značení:

$\mathbb{R}$ ... těleso reálných čísel

$\mathbb{C}$ ... těleso komplexních čísel

$\mathbb{F}$ ... těleso $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

Je-li X vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, nulový vektor značíme $\boldsymbol{o}$ (a někdy také 0).

Je-li X vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, $Y \subset\subset X$ znamená, že Y je podprostor X.

V.1 Lokálně konvexní topologie a jejich generování

Definice. **Topologickým vektorovým prostorem nad** $\mathbb{F}$ rozumíme dvojici $(X, \mathcal{T})$, kde X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a $\mathcal{T}$ je topologie na X, která má následující dvě vlastnosti:

(1) Zobrazení $(x, y) \mapsto x + y$ je spojité zobrazení $X \times X$ do X.
(2) Zobrazení $(t, x) \mapsto tx$ je spojité zobrazení $\mathbb{F} \times X$ do X.

Místo termínu *topologický vektorový prostor* budeme používat zkratku **TVS**. Je-li $(X, \mathcal{T})$ navíc Hausdorffův, píšeme **HTVS**.

Symbolem $\mathcal{T}(\boldsymbol{o})$ budeme rozumět systém všech okolí bodu $\boldsymbol{o}$ v $(X, \mathcal{T})$.

Definice. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je TVS. Prostor X se nazývá **lokálně konvexní**, pokud existuje báze okolí nuly tvořená konvexními množinami. Termín *lokálně konvexní TVS* budeme zkracovat **LCS**, Hausdorffův pak **HLCS**.

Příklady 1.

(1) *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor a $\mathcal{T}$ nechť je topologie generovaná normou (tj. generovaná metrikou generovanou normou). Pak $(X, \mathcal{T})$ je HLCS.*
(2) *Nechť Γ je libovolná neprázdná množina. Pak $\mathbb{F}^\Gamma$ je HLCS, je-li opatřen součinovou topologií.*
(3) *Prostor $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{F})$ spojitých funkcí na $\mathbb{R}$ je HLCS, pokud je opatřen topologií lokálně stejnoměrné konvergence. Ta je generovaná například metrikou*

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, \max\{|f(x) - g(x)|\,; x \in [-n, n]\}\}, \quad f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{F}).$$

(4) *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina. Pak prostor $H(\Omega)$ holomorfních funkcí na Ω je HLCS, pokud je opatřen topologií lokálně stejnoměrné konvergence. Ta je generovaná například metrikou*

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, \max\{|f(z) - g(z)|\,; z \in K_n\}\}, \quad f, g \in H(\Omega),$$

kde (K_n) je posloupnost kompaktních množin vyčerpávající Ω (tj. splňující $K_n \subset \operatorname{Int} K_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\bigcup_n K_n = \Omega$).

(5) *Nechť* (Ω,Σ,μ) *je prostor s nezápornou mírou a* $p\in(0,1)$. *Pak prostor* $L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$ *tvořený třídami ekvivalence měřitelných funkcí* $f:\Omega\to\mathbb{F}$ *splňujících* $\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu<\infty$ *je HTVS, pokud je opatřen topologií generovanou metrikou*

$$\rho(f,g)=\int_\Omega |f-g|^p \,\mathrm{d}\mu, \qquad f,g\in L^p(\Omega,\Sigma,\mu).$$

Pokud například $\Omega=[0,1]$ *a* μ *je Lebesgueova míra nebo* $\Omega=\mathbb{N}$ *a* μ *je sčítací míra, pak tento prostor není lokálně konvexní.*

Poznámka: Dále se budeme zabývat pouze lokálně konvexními prostory. Pro obecné topologické vektorové prostory je část teorie zcela analogická, část podobná s výrazně těžšími důkazy a část zcela jiná. Shody a rozdíly zmíníme v občasných poznámkách a několika příkladech.

Pozorování: Je-li $(X,\mathcal{T})$ LCS, pak $\mathcal{T}$ je invariantní vůči posunutí. Tj., je-li $A\subset X$ a $x\in X$, pak A je otevřená, právě když $x+A$ je otevřená. Z toho plyne, že množina $A\subset X$ je okolím bodu $x\in X$, právě když $-x+A\in\mathcal{T}(\boldsymbol{o})$. Proto systém $\mathcal{T}(\boldsymbol{o})$ jednoznačně určuje topologii $\mathcal{T}$.

Definice. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a $A\subset X$. Říkáme, že množina A je

- **konvexní**, pokud pro každé $x,y\in A$ a každé $t\in[0,1]$ platí $tx+(1-t)y\in A$;
- **symetrická**, pokud $A=-A$;
- **vyvážená**, pokud pro každé $\alpha\in\mathbb{F}$ splňující $|\alpha|\le 1$ platí $\alpha A\subset A$;
- **absolutně konvexní**, je-li konvexní a vyvážená;
- **pohlcující**, pokud pro každé $x\in X$ existuje $t>0$, že $\{sx; s\in[0,t]\}\subset A$.

Definice. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a $A\subset X$. **Konvexním obalem** (**vyváženým obalem**, resp. **absolutně konvexním obalem**) množiny A rozumíme nejmenší konvexní (vyváženou, resp. absolutně konvexní) množinu obsahující A. Tuto množinu značíme $\operatorname{co}(A)$ ($\operatorname{b}(A)$, resp. $\operatorname{aco}(A)$).

Větička 2. *Nechť* X *je vektorový prostor nad* $\mathbb{F}$ *a* $A\subset X$.

(a) *Je-li* $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, *pak* A *je absolutně konvexní, právě když je konvexní a symetrická.*
(b) $\operatorname{co}(A)=\{t_1x_1+\cdots+t_kx_k; x_1,\dots,x_k\in A, t_1,\dots,t_k\ge 0, t_1+\cdots+t_k=1\}$.
(c) $\operatorname{b}(A)=\{\alpha x; x\in A, \alpha\in\mathbb{F}, |\alpha|\le 1\}$.
(d) $\operatorname{aco}(A)=\operatorname{co}(\operatorname{b}(A))$.
(e) A *je konvexní, právě když pro každá dvě kladná čísla* s,t *platí* $(s+t)A=sA+tA$.

Větička 3. *Nechť* $(X,\mathcal{T})$ *je LCS a* $U\in\mathcal{T}(\boldsymbol{o})$. *Pak platí:*

(i) U *je pohlcující.*
(ii) *Existuje* $V\in\mathcal{T}(\boldsymbol{o})$ *splňující* $V+V\subset U$.
(iii) *Existuje* $V\in\mathcal{T}(\boldsymbol{o})$ *otevřená a absolutně konvexní splňující* $V\subset U$.

Věta 4.

(1) *Nechť* $(X, \mathcal{T})$ *je LCS. Pak existuje* $\mathcal{U}$*, báze okolí* $\boldsymbol{o}$ *s vlastnostmi:*
  (i) Prvky $\mathcal{U}$ *jsou pohlcující, otevřené a absolutně konvexní.*
  (ii) Pro každé $U \in \mathcal{U}$ *existuje* $V \in \mathcal{U}$ *splňující* $2V \subset U$*. Je-li* X *navíc Hausdorffův, platí také* $\bigcap \mathcal{U} = \{\boldsymbol{o}\}$*.*

(2) *Obráceně, nechť* X *je vektorový prostor a* $\mathcal{U}$ *je systém podmnožin* X *s vlastnostmi:*
  (i) Prvky $\mathcal{U}$ *jsou pohlcující a absolutně konvexní.*
  (ii) Pro každé $U \in \mathcal{U}$ *existuje* $V \in \mathcal{U}$ *splňující* $2V \subset U$*.*
  (iii) Pro každé $U, V \in \mathcal{U}$ *existuje* $W \in \mathcal{U}$ *splňující* $W \subset U \cap V$*.*

  Pak existuje právě jedna topologie $\mathcal{T}$ *na* X *taková, že* $(X, \mathcal{T})$ *je LCS a* $\mathcal{U}$ *je báze okolí* $\boldsymbol{o}$*. Pokud navíc* $\bigcap \mathcal{U} = \{\boldsymbol{o}\}$*, je* $\mathcal{T}$ *Hausdorffova.*

Věta 5 (o topologii generované systémem pseudonorem). *Nechť* X *je vektorový prostor a* $\mathcal{P}$ *neprázdný systém pseudonorem na* X*. Pak existuje právě jedna topologie* $\mathcal{T}$ *na* X*, pro kterou* $(X, \mathcal{T})$ *je LCS a systém*

$$\Big\{\{x \in X; p_1(x) < c_1, \dots, p_k(x) < c_k\}; p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}, c_1, \dots, c_k > 0\Big\}$$

je báze okolí $\boldsymbol{o}$ v $(X, \mathcal{T})$*. Topologie* $\mathcal{T}$ *je Hausdorffova, právě když pro každé* $x \in X \setminus \{\boldsymbol{o}\}$ *existuje* $p \in \mathcal{P}$*, pro které* $p(x) > 0$*.*

Definice. Topologie $\mathcal{T}$ z Věty 5 se nazývá **topologie generovaná systémem pseudonorem** $\mathcal{P}$.

Příklady 6.

(1) *Je-li* $(X, \|\cdot\|)$ *normovaný lineární prostor, pak* $\|\cdot\|$ *je pseudonorma na* X*. Topologie generovaná normou splývá s topologií generovanou jednoprvkovým systémem pseudnorem* $\{\|\cdot\|\}$*.*

(2) *Součinová topologie na* $\mathbb{F}^\Gamma$ *z Příkladu 1(2) splývá s topologií generovanou systémem pseudonorem* $\{p_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$*, kde*

$$p_\gamma(f) = |f(\gamma)|, \ f \in \mathbb{F}^\Gamma.$$

(3) *Topologie lokálně stejnoměrné konvergence na* $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{F})$ *z Příkladu 1(3) splývá s topologií generovanou posloupností pseudonorem* $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$*, kde*

$$p_n(f) = \sup\{|f(x)|; x \in [-n, n]\}, \quad f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{F}).$$

(4) *Nechť* T *je Hausdorffův topologický prostor a* $\mathcal{C}(T, \mathbb{F})$ *nechť označuje prostor spojitých funkcí na* T*. Pak systém pseudonorem*

$$\mathcal{P} = \{p_K; K \subset T \text{ kompaktní}\}, \ \text{kde}\ p_K(f) = \max_{x \in K} |f(x)|, \ f \in \mathcal{C}(T, \mathbb{F}),$$

generuje na $\mathcal{C}(T, \mathbb{F})$ *topologii stejnoměrné konvergence na kompaktech. Je-li* T *lokálně kompaktní, jde o topologii lokálně stejnoměrné konvergence.*

Definice. Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je konvexní pohlcující množina. **Minkowského funkcionálem** množiny A rozumíme funkci definovanou vzorcem

$$p_A(x) = \inf\{\lambda > 0; x \in \lambda A\}, \qquad x \in X.$$

Lemma 7. *Nechť X je LCS a $A \subset X$ je konvexní množina. Pokud $x \in \overline{A}$ a $y \in \operatorname{Int} A$, pak $\{tx + (1-t)y; t \in [0,1)\} \subset \operatorname{Int} A$.*

Tvrzení 8 (o Minkowského funkcionálu konvexního okolí nuly). *Nechť X je LCS a $A \subset X$ je konvexní okolí $\boldsymbol{o}$. Pak platí:*

- *p_A je spojitá na X.*
- $\operatorname{Int} A = \{x \in X; p_A(x) < 1\}$.
- $\overline{A} = \{x \in X; p_A(x) \leq 1\}$.
- $p_A = p_{\overline{A}} = p_{\operatorname{Int} A}$.

Důsledek 9. *Každý LCS je úplně regulární. Každý HLCS je Tichonovův.*

Věta 10 (o generování lokálně konvexních topologií). *Nechť $(X, \mathcal{T})$ je LCS. Nechť $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ je systém všech spojitých pseudonorem na prostoru $(X, \mathcal{T})$. Pak topologie generovaná systémem $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ je rovna $\mathcal{T}$.*

Tvrzení 11. *Nechť X je vektorový prostor.*

(1) *Je-li p pseudonorma na X, pak množina $A = \{x \in X; p(x) < 1\}$ je absolutně konvexní, pohlcující a platí $p = p_A$.*
(2) *Nechť p, q jsou dvě pseudonormy na X. Pak $p \leq q$, právě když*
$$\{x \in X; p(x) < 1\} \supset \{x \in X; q(x) < 1\}.$$
(3) *Nechť $\mathcal{P}$ je neprázdný systém pseudonorem na X a $\mathcal{T}$ je topologie generovaná systémem $\mathcal{P}$. Nechť p je pseudonorma na X. Pak p je $\mathcal{T}$-spojitá, právě když existují $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$ a $c > 0$, pro která platí $p \leq c \cdot \max\{p_1, \dots, p_k\}$.*

Poznámka: Z tohoto oddílu o obecných TVS platí:

- Pozorování za Příklady 1 beze změny.
- Větička 3, pokud v bodě (iii) nahradíme slova „absolutně konvexní“ slovem „vyvážená“.
- Věta 4, pokud v ní nahradíme slova „absolutně konvexní“ slovem „vyvážená“ a navíc požadavek „$2V \subset U$“ požadavkem „$V + V \subset U$“.
- Lemma 7 a Tvrzení 8 beze změny.
- Důsledek 9 beze změny, ale s výrazně těžším důkazem.