Funkcionální analýza 1 – úvodní informace

O čem a k čemu je tato přednáška

- Jak je zřejmé z názvu, tato přednáška se věnuje funkcionální analýze, což je velmi široká oblast matematiky, která se zabývá mj. nekonečněrozměrnými vektorovými prostory s dodatečnou topologickou strukturou a spojitými lineárními zobrazeními.
- Tématem přednášky jsou čtyři pokročilé partie funkcionální analýzy:
  - Lokálně konvexní prostory a slabé topologie – zobecnění normovaných prostorů. Slabé topologie jsou mj. důležité pro hlubší pochopení vlastností Banachových prostorů. Lokálně konvexní prostory zase například poskytují potřebnou teorii ke studiu některých prostorů funkcí, které nejsou normovatelné (algebry spojitých, hladkých či holomorfních funkcí, Schwartzův prostor aj.). Existuje i ještě obecnější teorie topologických vektorových prostorů (která zahrnuje mj. kvazinormované prostory, p-normované prostory aj.), které se též používají při studiu prostorů funkcí. Té se dotkneme spíše okrajově.
  - Teorie distribucí – zobecněných funkcí a měr, která se využívá zejména při studiu parciálních diferenciálních rovnic.
  - Základy vektorové integrace – zobecnění Lebesgueova integrálu pro funkce s hodnotami v Banachových prostorech. Hodí se to třeba při studiu některých parciálních diferenciálních rovnic.
  - Něco málo o kompaktních konvexních množinách – jejich generování pomocí extremálních bodů a integrální reprezentace. Používá se to v mnoha oblastech analýzy, mj. při studiu diferenciálních rovnic; zároveň jde o úvod do rozsáhlé obecnější teorie.

Potřebné znalosti

Jde o pokročilý kurz magisterského studia, k jehož porozumění je třeba nemalé množství počátečních znalostí. Mimo jiné tyto:

- Základy funkcionální analýzy – normované lineární prostory, Banachovy a Hilbertovy prostory, duální prostory, omezené lineární operátory, základní věty funkcionální analýzy. Tyto znalosti se používají v průběhu celé přednášky.
- Základy obecné topologie – topologické prostory, báze topologie, báze okolí, spojitá zobrazení, základní topologické konstrukce, kompaktní prostory. Toto je nezbytné pro porozumění prvnímu a čtvrtému okruhu.
- Teorie míry a integrálu – abstraktní míra, abstraktní Lebesgueův integrál, Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}^n$. Toto je zcela klíčové ve druhé a třetí oblasti, ale používá se i v oblasti první a čtvrté.
- Reálná analýza – diferenciální a integrální počet funkcí jedné i více proměnných. To je důležité zejména v druhém okruhu.