Otevřené a uzavřené množiny, vnitřek, uzávěr, hranice

1. Nechť $A \subset \mathbf{R}^n$. Ukažte, že

$$\overline{A} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n : (\forall r > 0)(B(\boldsymbol{x}, r) \cap A \neq \emptyset)\}.$$

Z toho odvoďte rovnosti

$$\overline{A} = \operatorname{int} A \cup H(A), \quad H(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A.$$

2. Nechť $A \subset \mathbf{R}^n$. Ukažte, že platí:
(i) $H(A) = H(\mathbf{R}^n \setminus A)$, (ii) $\operatorname{int} A = \mathbf{R}^n \setminus \overline{\mathbf{R}^n \setminus A}$, (iii) $\overline{A} = \mathbf{R}^n \setminus \operatorname{int}(\mathbf{R}^n \setminus A)$.

3. Pro následující podmnožiny $\mathbf{R}$ zjistěte, zda jsou otevřené nebo uzavřené, a určete jejich vnitřek, uzávěr a hranici:
(a) $\mathbf{N}$, (b) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$, (c) $\mathbf{Q}$, (d) $(-\infty, 0) \cup \{x \in \mathbf{Q} : x > 0\}$.

4. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $f : G \to \mathbf{R}$ je funkce spojitá na G. Ukažte, že pro každé $c \in \mathbf{R}$ jsou množiny

$$\{\boldsymbol{x} \in G : f(\boldsymbol{x}) > c\}, \qquad \{\boldsymbol{x} \in G : f(\boldsymbol{x}) < c\}$$

otevřené v $\mathbf{R}^n$.

5. Nechť $F \subset \mathbf{R}^n$ je uzavřená množina a $f : F \to \mathbf{R}$ je funkce spojitá na F. Ukažte, že pro každé $c \in \mathbf{R}$ jsou množiny

$$\{\boldsymbol{x} \in F : f(\boldsymbol{x}) \geq c\}, \qquad \{\boldsymbol{x} \in F : f(\boldsymbol{x}) \leq c\}$$

uzavřené v $\mathbf{R}^n$.

6. Pro následující podmnožiny $\mathbf{R}^2$ zjistěte, zda jsou otevřené nebo uzavřené, a určete jejich vnitřek, uzávěr a hranici:
(a) $A = \{[x, y] : x \geq 0, y > 0\}$, (b) $B = \{[x, y] : y < \sin x\}$,
(c) $C = \{[x, y] : (x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2) \leq 0\}$, (d) $D = \{[x, y] : (x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2) < 0\}$.

Parciální derivace

7. Pro následující funkce určete jejich definiční obor a spočtěte parciální derivace prvního řádu podle všech proměnných ve všech bodech, kde existují:
a) x^y, b) $x^{(y^z)}$, c) $\sqrt{x^2 + y^2}$, d) $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$,
e) $\sqrt{xy}$, f) $|y - x^2|$, g) $|y - x^3|$, h) $|y^2 - x^2|$, i) $x \cdot [y]$.

Extrémy – elementární metody

8. Najděte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá:
(a) $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + xy + y$, $M = \{[x, y] : 2|x| + |y| \leq 3\}$;
(b) $f(x, y) = x^2 + xy$, $M = \{[x, y] : x^2 + y^2 < 4\}$;
(c) $f(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2 + 1}$, $M = \mathbf{R}^2$;
(d) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x + 2y + 1}$, $M = \{[x, y] : x > 0, y > 0\}$.

Extrémy – použití věty o multiplikátorech

9. Najděte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá:
(a) $f(x,y,z) = \frac{x}{y}$, $M = \{[x,y,z] : x^2 + (y-3)^2 + z^2 \leq 1, y + z \leq 4$;
(b) $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + z^2$, $M = \{[x,y,z] : x^2 + y^2 = z^2, xy \geq 1\}$;
(c) $f(x,y,z) = yz$, $M = \{[x,y,z] : x^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$;
(d) $f(x,y,z) = xy + z$, $M = \{[x,y,z] : x^2 + y^2 = 2, xyz \geq 1, z \geq 0\}$.

Aplikace věty o implicitních funkcích

10. Ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě x_0:
(a) $x^y = y^x$, $[x_0, y_0] = [2, 4]$; (b) $\operatorname{arctg}(y - x) + \operatorname{arctg} \frac{y^2}{x} = \frac{\pi}{4}$, $[x_0, y_0] = [1, 1]$;
(c) $x^2 e^{y^2} = ye^x$, $[x_0, y_0] = [1, 1]$; (d) $\sin(xy) + \cos(x + y) + 1 = 0$, $[x_0, y_0] = [\pi, 0]$;
(e) $e^{(\frac{x}{y}-1)} + e^{x-y^2} = 2$, $[x_0, y_0] = [1, 1]$.

11. Ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$ implicitně zadanou funkci $z = f(x, y)$. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.
(a) $x^{y^z} + z^{x^y} = 2y^{z^x}$, $[x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 1]$;
(b) $e^{xy} + e^{yz} + e^{xz} = e^{xyz}$, $[x_0, y_0, z_0] = [0, 2, 0]$.

12. Dokažte, že existují funkce $y = y(x)$ a $z = z(x)$ třídy C^∞ na okolí bodu 0, které splňují $y(0) = z(0) = -1$ a vztahy

$$6xyz - x - 2y - 3z = 5, \qquad e^{xz} = yz.$$

Spočtěte $y'(0), z'(0), y''(0)$ a $z''(0)$.

Počítání s maticemi

13. Určete hodnost následujících matic (v závislosti na parametru):

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 & -8 \\ 1 & 9 & 3 & 7 & 1 \\ 10 & 11 & 10 & 9 & 20 \\ 9 & 2 & 7 & 2 & 19 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & x & x+1 \\ y & y+1 & 15 & 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & y & 2 & 1 \\ 2 & 3 & x & x & y \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2+|x| & x^2 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

14. Najděte inverzní matice k následujícím maticím (v závislosti na parametru)

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -9 & -2 \\ 14 & -4 & 18 & 0 \\ 12 & -4 & 16 & 0 \\ 9 & -2 & 15 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 14 \\ 10 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 7 & 4 & 4 & 7x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Spočtěte determinanty:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 7 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 4 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -6 \\ 9 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 2 & 1 & 6 & 7 \\ 12 & 3 & 4 & 5 & 8 \\ 12 & 12 & 11 & 10 & 9 \end{vmatrix}$$

Řešení soustav lineárních rovnic

16. Najděte všechna řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pro uvedenou matici $\mathbb{A}$ a uvedené tři vektory pravých stran $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ a $\mathbf{b}_3$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

17. Najděte všechna řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pro uvedenou matici $\mathbb{A}$ a uvedené dva vektory pravých stran $\mathbf{b}_1$ a $\mathbf{b}_2$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 0 & 7 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

18. Pro která $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ má soustava $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ řešení? Najděte všechna řešení pro uvedený vektor pravých stran.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}, \text{ pravá strana } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vyšetřování konvergence řad

19. Pro následující řady určete, zda konvergují absolutně, konvergují neabsolutně či divergují.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)!\cdot(2n+1)!\cdot(-7)^n}{(3n)!}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n+700)!n!(-8)^n}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin\frac{1}{n}\right)^{(n^2)}$, (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^3+n} - \sqrt{n^3-1})$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log(n+1)}$, (g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \log\frac{1}{n}$,

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$, (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(n \sin\frac{1}{n}\right)$, (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\cos\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,

(k) $\sum_{n=18}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+17}}{\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt[3]{n^3+17n}}$, (l) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot (1 - \cos(\sqrt{n^2+7} - \sqrt{n^2+1}))$,

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt[3]{n^2-n} - \sqrt[3]{n^2-2n})$, (n) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2-1}-n}{\sqrt{n^2+n}-n}$, (o) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} n \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{n}$,

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\cos\frac{2}{\sqrt{n+4}}}$.