Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (E)
ZS 2007-2008

Příklad 1: Najděte Laurentův rozvoj funkce

$$f(z) = \frac{\sin z}{z-1}$$

v maximálních možných mezikružích o středu 0. (10 bodů)

Příklad 2: Najděte součet řady:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+n+7}{16n^4-1}$$ (20 bodů)

Příklad 3: Spočtěte integrál:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+1}{x^4-x^2+1}\, \mathrm{d}x$$ (20 bodů)

Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (E)
ZS 2007-2008
Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Na $U(0,1)$ je $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{[\frac{k-1}{2}]}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\right)z^k$; na $P(0,1,\infty)$ je $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=\max\{0,\lceil\frac{k}{2}\rceil\}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right)z^k$.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) f je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, tedy na $U(0,1)$ lze vyjádřit mocninnou řadou, na $P(0,1,\infty)$ Laurentovou řadou. (1 bod)
2) $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ na $\mathbb{C}$. (1 bod)
3) $\frac{1}{z-1}=\begin{cases}-\sum_{m=0}^{\infty}z^m, & z\in U(0,1)\ (1\text{ bod}),\\ \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{z^m}, & z\in P(0,1,\infty)\ (2\text{ body}).\end{cases}$
4. Výsledek dostaneme vynásobením příslušných řad. (5 bodů, z toho 2 body na $U(0,1)$ a 3 body na $P(0,1,\infty)$).

Příklad 2: Výsledek: $-\pi(\frac{29}{16}+\frac{27}{8(e^{\pi/2}-e^{-\pi/2})})$.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Všechny členy řady jsou definované, řada konverguje absolutně dle srovnávacího kritéria. (1 bod)
2) Označme $f(z)=\frac{z^2+z+7}{16z^4-1}$, $g(z)=f(z)\cdot\frac{\pi}{\sin\pi z}$ a $\varphi_n(t)=(n+\frac{1}{2})e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$. Podle reziduové věty spočteme $\int_{\varphi_n}g$ a provedeme limitní přechod pro $n\to\infty$. (2 body)
3) Funkce g je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus(\mathbb{Z}\cup\{\frac{1}{2},\frac{i}{2},-\frac{1}{2},-\frac{i}{2}\})$. Ve všech vyloučených bodech má g nejvýše pól násobnosti 1. (2 body)
4) Spočteme rezidua:
(i) Reziduum g v bodě $k\in\mathbb{Z}$ je $(-1)^k\frac{k^2+k+7}{16k^4-1}$. (2 body)
(ii) Reziduum g v bodě $\frac{1}{2}$ je $\frac{31}{32}\pi$. (2 body)
(iii) Reziduum g v bodě $-\frac{1}{2}$ je $\frac{27}{32}\pi$. (2 body)
(iv) Reziduum g v bodě $\frac{i}{2}$ je $\frac{(27+2i)\pi}{16(e^{\pi/2}-e^{-\pi/2})}$. (2 body)
(v) Reziduum g v bodě $-\frac{i}{2}$ je $\frac{(27-2i)\pi}{16(e^{\pi/2}-e^{-\pi/2})}$. (2 body)
5) Podle reziduové věty tedy $\int_{\varphi_n}g=2\pi i(\sum_{k=-n}^{n}\frac{k^2+k+7}{16k^4-1}+\operatorname{res}_{\frac{1}{2}}g+\operatorname{res}_{-\frac{1}{2}}g+\operatorname{res}_{\frac{i}{2}}g+\operatorname{res}_{-\frac{i}{2}}g$. (1 bod)
6) Protože $\lim_{n\to\infty}\int_{\varphi_n}g=0$, dostáváme kombinací předchozích faktů výsledek. (4 body)

Příklad 3: Výsledek: 2π

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Integrál konverguje (funkce je spojitá na $\mathbb{R}$, použije se srovnávací kritérium). (1 bod)
2) Označme integrovanou funkci f a pro $R>0$ nechť $\psi_R(t)=Re^{it}$, $t\in[0,\pi]$, a $\varphi_R=[-R,R]\dot{+}\psi_R$. Spočteme integrál z f podél φ_R dle reziduové věty a provedeme limitní přechod pro $R\to\infty$. (3 body)
3) f je racionální funkce s póly v bodech $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$. Všechny póly jsou násobnosti 1. Přitom body $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ a $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ leží „vně křivky“, je v nich index nula. (4 body)
4) Reziduum v bodě $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ je $-i\frac{3-\sqrt{3}}{6}$, reziduum v bodě $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ je $-i\frac{3+\sqrt{3}}{6}$. (5 bodů)
5) Pro $R>1$ je dle reziduové věty $\int_{\varphi_R}=2\pi$. (4 body)
6) $\lim_{R\to\infty}\int_{\psi_R}f=0$, limita integrálu přes $[-R,R]$ je rovna integrálu ze zadání. Tím dostáváme výsledek. (3 body)