Písemka G z matematické analýzy MAI054

zimní semestr 2006 - 2007

Všechny postupy řádně zdůvodněte.

Příklad 1. Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \log n \cdot (\operatorname{arctg} \log n - \operatorname{arctg} n). \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

Příklad 2. Rozhodněte, pro která $x \in \langle 0, \pi \rangle$ konverguje resp. absolutně konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (1 - 2\cos^2 x)^n. \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

Příklad 3.
Spočítejte

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(\sqrt[3]{e})^{\sin x} - \cos\sqrt{x}}{(\log(1+\sqrt{x}))^2}. \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

Příklad 4. Určete ve kterých bodech $x \in \mathbf{R}$ je spojitá (případně jednostranně spojitá) funkce

$$f(x) = \left([\sqrt{x}] + 1\right)^x \qquad ([..] \text{ znamená celou část}) \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

a ve kterých bodech existují její oboustranné resp. jednostranné derivace a spočítejte je.

Příklad 5.
Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = 4^{x/(x+1)}. \qquad \textbf{(20 bodů)}$$

Písemka G – výsledky:

Příklad 1: -1.

Příklad 2: Pro $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ řada konverguje absolutně (lze použít odmocninové nebo podílové kritérium); pro $x = 0$ a $x = \pi$ řada diverguje (jde o řadu $\sum \frac{1}{n}$); pro $x = \frac{\pi}{2}$ řada konverguje neabsolutně (pro konvergenci lze použít Leibnizovo kritérium, řada absolutních hodnot je $\sum \frac{1}{n}$).

Příklad 3: $\frac{5}{6}$.

Příklad 4: $D_f = \langle 0, +\infty)$; f je spojitá v každém bodě $(0, +\infty) \setminus \{k^2 : k \in \mathbf{N}\}$; v bodech k^2 pro $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ je spojitá zprava a nespojitá zleva.

$f'(x) = (k+1)^x \log(k+1)$ pro $x \in (k^2, (k+1)^2)$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$; $f'_+(k^2) = (k+1)^{k^2} \log(k+1)$ pro $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$; $f'_-(k^2) = +\infty$ pro $k \in \mathbf{N}$.

Příklad 5: