Písemka F z matematické analýzy MAI054

zimní semestr 2006 - 2007

Všechny postupy řádně zdůvodněte.

Příklad 1. Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} n^8 \left(5 - 4\cos\frac{1}{n^2} - \sqrt{1+\frac{4}{n^4}}\right). \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

Příklad 2. Rozhodněte, pro která $x \in (0, +\infty)$ konverguje resp. absolutně konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}. \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

Příklad 3.
Spočítejte

$$\lim_{x\to 1+} \frac{\sqrt{e^{2x}-e^2}}{\arccos\frac{1}{x}}. \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

Příklad 4. Určete ve kterých bodech $x \in R$ je spojitá (případně jednostranně spojitá) funkce

$$f(x) = x \cdot |5 - 5^{\cos x}| \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

a ve kterých bodech existují její oboustranné resp. jednostranné derivace a spočítejte je.

Příklad 5.
Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left|\frac{x}{x+1}\right|. \qquad \textbf{(20 bodů)}$$

Písemka F – výsledky:

Příklad 1: $\frac{11}{6}$.

Příklad 2: Pro $x \in (0,1)$ řada konverguje absolutně (lze použít odmocninové nebo podílové kritérium, nebo též přímo srovnání s geometrickou řadou); pro $x > 1$ řada diverguje (není splněna nutná podmínka konvergence); pro $x = 1$ nejsou její členy definovány.

Příklad 3: e.

Příklad 4: $D_f = \mathbf{R}$; f je spojitá na $\mathbf{R}$. Platí $5 - 5^{\cos x} \geq 0$ pro všechna $x \in \mathbf{R}$; absolutní hodnotu můžeme tedy vynechat. Je tedy $f'(x) = 5 - 5^{\cos x} + x \cdot 5^{\cos x} \cdot \log 5 \cdot \sin x$ pro $x \in \mathbf{R}$.

Příklad 5: