Písemka E z matematické analýzy MAI054

zimní semestr 2006 - 2007

Všechny postupy řádně zdůvodněte.

Příklad 1. Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos \operatorname{arctg} \sqrt{n}}{\sin \operatorname{arccotg} \sqrt{n}}. \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

Příklad 2. Rozhodněte, pro která $x \in R$ konverguje resp. absolutně konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n!} |x|^{nx}. \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

Příklad 3.
Spočítejte

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{(\operatorname{arctg} x)^{2/x} + 4^{1/x}}{2} \right)^x. \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

Příklad 4. Určete ve kterých bodech $x \in R$ je spojitá (případně jednostranně spojitá) funkce

$$f(x) = [\cos x] \cdot (\sin x + \sin^2 x) \qquad ([..] \text{ značí celou část}) \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

a ve kterých bodech existují její oboustranné resp. jednostranné derivace a spočítejte je.

Příklad 5.
Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = |x-2|e^{1/x}. \qquad \textbf{(20 bodů)}$$

Písemka E – výsledky:

Příklad 1: 1.

Příklad 2: Pro $x \neq 0$ řada konverguje absolutně podle podílového kritéria. Pro $x = 0$ nejsou její členy definovány.

Příklad 3: π.

Příklad 4: $D_f = \mathbf{R}$; f je spojitá v každém bodě $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$. Ve zbylých bodech je spojitá zleva, ale ne zprava.

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi), \\ -\cos x - 2\sin x \cos x, & x \in \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi); \end{cases}$$

$f'_-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0$, $f'_+(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -\infty$, $f'(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0$ (pro $k \in \mathbf{Z}$).

Příklad 5: