Písemka D z matematické analýzy MAI054

zimní semestr 2006 - 2007

Všechny postupy řádně zdůvodněte.

Příklad 1. Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} n^4 \log^3 n \left(\sqrt[4]{\log(n+8)} - \sqrt[4]{\log n} \right)^4 . \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

Příklad 2. Rozhodněte, pro která $x \in R$ konverguje resp. absolutně konverguje řada

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{n^2} \right)^n x^n . \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

Příklad 3.
Spočítejte

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^{\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}} . \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

Příklad 4. Určete ve kterých bodech $x \in R$ je spojitá (případně jednostranně spojitá) funkce

$$f(x) = (1 + |x^2 - 9|)^{x+3} \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

a ve kterých bodech existují její oboustranné resp. jednostranné derivace a spočítejte je.

Příklad 5.
Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} e^{-x} . \qquad \textbf{(20 bodů)}$$

Písemka D – výsledky:

Příklad 1: 16.

Příklad 2: Pro $x \in (-3, 3)$ konverguje absolutně, jinak diverguje. Lze použít odmocninové kritérium a nutnou podmínku konvergence.

Příklad 3: Limita neexistuje (zprava $e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, zleva $e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$).

Příklad 4: $D_f = \mathbf{R}$, f je spojitá na $\mathbf{R}$.

$f'(x) = (1 + |x^2 - 9|)^{x+3} \left(\log(1 + |x^2 - 9|) + \frac{2x(x+3)\,\mathrm{sgn}(x^2-9)}{1+|x^2-9|} \right)$ pro $x \in R \setminus \{-3, 3\}$; $f'(-3) = 0$, $f'_-(3) = -36$, $f'_+(3) = 36$.

Příklad 5: