Písemka A z matematické analýzy MAI054

zimní semestr 2006 - 2007

Všechny postupy řádně zdůvodněte.

Příklad 1.
Vyšetřete konvergenci posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} - \sqrt{n^{n+2}(n+2)^n}}{n^n}. \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

Příklad 2.
Vyšetřete, zda konverguje řada

$$\sum_1^\infty \sin(\pi(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}))\mathrm{arctg} 4^n. \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

Příklad 3.
Spočítejte

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{1-\cos(\sin x)}}{\ln\sqrt{e^{2x}+x}}. \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

Příklad 4.
Určete ve kterých bodech $x \in R$ je spojitá funkce

$$f(x) = \max\{1, 2x, x^2\}^x \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

a ve kterých bodech existují její oboustranné resp. jednostranné derivace a spočítejte je.

Příklad 5.
Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sin x + |\cos x|. \qquad \textbf{(20 bodů)}$$

Výsledky:
Příklad 1: $\frac{3}{2}e$
Příklad 2: Řada diverguje. Lze použít limitní srovnávací kritérium a srovnat s řadou $\sum \frac{1}{n^{2/3}}$.
Příklad 3: $-\frac{\sqrt{2}}{3}$
Příklad 4: $D_f = R$, f je spojitá na R.

$$f'(x) = \begin{cases} (x^2)^x(\ln x^2 + 2), & x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty), \\ 0, & x \in (-1, \frac{1}{2}), \\ (2x)^x(\ln 2x + 1), & x \in (\frac{1}{2}, 2). \end{cases}$$

$f'_-(-1) = 2$, $f'_+(-1) = 0$, $f'_-(\frac{1}{2}) = 0$, $f'_+(\frac{1}{2}) = 1$, $f'_-(2) = 16(\log 4 + 1)$, $f'_+(2) = 16(\log 4 + 2)$.
Příklad 5: