Písemná zkouška z Matematiky III pro IES FSV UK (C)
ZS 2005-2006

Příklad 1 : Najděte primitivní funkci (včetně určení intervalů existence)

$$\int \frac{1}{(\sqrt{x^2+x+7}-x)^3+\sqrt{x^2+x+7}-x}\,\mathrm{d}x. \qquad (16 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Nechť B je bilineární forma reprezentovaná maticí $\mathbb{A}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 30 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 20 \end{pmatrix}.$$

Určete povahu formy B (je-li PD, ND, PSD, NSD, ID) a spočtěte $B\left(\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$. (11 bodů)

Příklad 3 : Určete vlastní čísla matice $\mathbb{B}$ a všechny jim příslušné vlastní vektory.

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 21 & 24 & 34 \\ -12 & -12 & -17 \end{pmatrix} \qquad (11 \text{ bodů})$$

Příklad 4 : Spočtěte limitu (například s využitím Taylorova polynomu):

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin 2x - 2e^{2x}\sin x - 4\cos x + 4}{\sin x - x} \qquad (11 \text{ bodů})$$

Příklad 5 : Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f v množině M, kde

$$f(x,y) = x^3 - 3xy + y^2 - y + x, \quad M = \mathbf{R}^2. \qquad (11 \text{ bodů})$$

– –

Výsledky písemky z Matematiky III pro IES FSV UK (C)
ZS 2005-2006

Příklad 1: $-14\log(\sqrt{x^2+x+7}-x) - \frac{14}{25}\log((\sqrt{x^2+x+7}-x)^2+1) - \frac{54}{25}\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+x+7}-x) + \frac{378}{25}\log(2(\sqrt{x^2+x+7}-x)-1) + \frac{54}{5}\cdot\frac{1}{2(\sqrt{x^2+x+7}-x)-1}$ na $\mathbf{R}$. Eulerovou substitucí $y=\sqrt{x^2+x+7}-x$ lze převést na racionální funkci.
Příklad 2: PD, 78.
Příklad 3: Vlastní číslo 3 násobnosti 2, vlastní vektory $t\cdot[1,-1,0]$, $t\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$; vlastní číslo 7 násobnosti 1, vlastní vektory $t\cdot[0,-2,1]$, $t\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$.
Příklad 4: 24
Příklad 5: Ostré lokální minimum v bodě $[\frac{9+\sqrt{105}}{12}, \frac{13+\sqrt{105}}{8}]$. (Sedlový bod $[\frac{9-\sqrt{105}}{12}, \frac{13-\sqrt{105}}{8}]$.)