Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (E)
LS 2004-2005

Příklad 1 : Najděte všechna řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pro uvedenou matici $\mathbb{A}$ a uvedené dva vektory pravých stran $\mathbf{b}_1$ a $\mathbf{b}_2$:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 0 & 7 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \log(1 - |x| - |y|),$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici funkce, jejímž grafem je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $[-\frac{1}{7}, \frac{5}{7}, f(-\frac{1}{7}, \frac{5}{7})]$. (10 bodů)

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\operatorname{arctg}(y - x) + \operatorname{arctg}\frac{y^2}{x} = \frac{\pi}{4}$$

určuje v jistém okolí bodu $[1, 1]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě 1. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

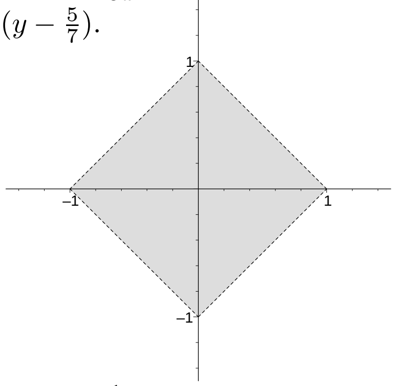
$$f(x,y,z) = y \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 16, y \le x^2\} \qquad \text{(18 bodů)}$$

Příklad 5 : Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot (1 - \cos(\sqrt{n^2+7} - \sqrt{n^2+1})) \qquad \text{(12 bodů)}$$

Výsledky písemky z Matematiky II pro FSV (E)
LS 2004-2005

Příklad 1: Pro $\mathbf{b}_1$: $[-\frac{5}{4}, 0, \frac{11}{4}, -\frac{1}{2}]$. Pro $\mathbf{b}_2$: $[-2, 0, 4, -1]$.
Příklad 2: $D_f = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-\operatorname{sgn} x}{1-|x|-|y|}$ pro $[x,y] \in D_f$, $x \ne 0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-\operatorname{sgn} y}{1-|x|-|y|}$ pro $[x,y] \in D_f$, $y \ne 0$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y \in (-1,1)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \in (-1,1)$ neexistují. tečná rovina: $z + \log 7 = 7(x + \frac{1}{7}) - 7(y - \frac{5}{7})$.
Definiční obor:



Příklad 3: $f'(1) = \frac{3}{4}$, $f''(1) = \frac{1}{32}$, rovnice tečny je $y = 1 + \frac{3}{4}(x-1)$.
Příklad 4: Minimum -4 v bodě $[0,-4,0]$, maximum $\frac{\sqrt{65}-1}{2}$ v bodech $[\sqrt{\frac{\sqrt{65}-1}{2}}, \frac{\sqrt{65}-1}{2}, 0]$ a $[-\sqrt{\frac{\sqrt{65}-1}{2}}, \frac{\sqrt{65}-1}{2}, 0]$. M je kompaktní.
Příklad 5: Konverguje absolutně. Pro řadu absolutních hodnot lze použít limitní srovnávací kritérium a srovnat s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.