Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (D)
LS 2004-2005

Příklad 1 : Určete hodnost následující matice v závislosti na parametrech $x, y \in \mathbf{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & x & x+1 \\ y & y+1 & 15 & 16 \end{pmatrix} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{e^{xy} - e},$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici funkce, jejímž grafem je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $[1, 1+\log 2, f(1, 1+\log 2)]$. (10 bodů)

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$e^{(\frac{x}{y}-1)} + e^{(x-y^2)} = 2$$

určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě 1. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x,y,z) = x(y+z) \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 = 4, x+y+z \geq 1\} \qquad \text{(18 bodů)}$$

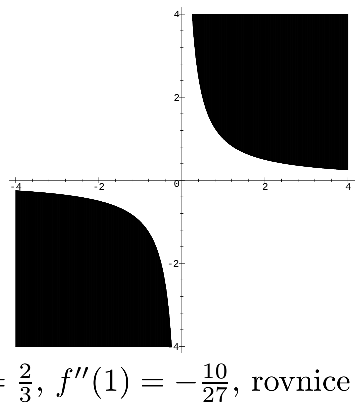
Příklad 5 : Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\cos\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \text{(12 bodů)}$$

– –

Výsledky písemky z Matematiky II pro FSV (D)
LS 2004-2005

Příklad 1: Je-li $x = 11$ a $y = 13$, je hodnost 2, ve všech ostatních případech je hodnost 3.
Příklad 2: $D_f = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2 : xy \geq 1\}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{ye^{xy}}{2\sqrt{e^{xy}-e}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xe^{xy}}{2\sqrt{e^{xy}-e}}$ pro $xy > 1$ (pro obě parciální derivace); v bodech, kde $xy = 1$ parciální derivace nemá smysl počítat. Tečná rovina: $[x,y] \mapsto \sqrt{e} + \sqrt{e}(1+\log 2)(x-1) + \sqrt{e}(y-1-\log 2)$.
Definiční obor:



Příklad 3: $f'(1) = \frac{2}{3}$, $f''(1) = -\frac{10}{27}$, rovnice tečny je $y = 1 + \frac{2}{3}(x-1)$.
Příklad 4: Maximum $\sqrt{6}$ v bodě $[\sqrt{2}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$; minimum $-\frac{3}{25}(16+\sqrt{6})$ v bodě $[\frac{2-3\sqrt{6}}{5}, \frac{2+2\sqrt{6}}{5}, \frac{1+\sqrt{6}}{5}]$. M je kompaktní.
Příklad 5: Diverguje. Jde o řadu se zápornými členy, pro řadu s opačnými členy lze použít limitní srovnávací kritérium a srovnat s řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$