Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (C)
LS 2004-2005

Příklad 1 : Najděte všechna řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pro uvedenou matici $\mathbb{A}$ a uvedené tři vektory pravých stran $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ a $\mathbf{b}_3$:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = (1 + |x|)^{|y|},$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici funkce, jejímž grafem je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $[1, 1, f(1, 1)]$. (10 bodů)

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\sin(xy) + \cos(x + y) + 1 = 0$$

určuje v jistém okolí bodu $[\pi, 0]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(\pi)$ a $f''(\pi)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě π. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x, y, z) = x + y + z \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 4, y + z - x = 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

(18 bodů)

Příklad 5 : Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin\frac{1}{n}\right)^{(n^2)} \qquad \text{(12 bodů)}$$

– –

Výsledky písemky z Matematiky II pro FSV (C)
LS 2004-2005

Příklad 1: Pro $\mathbf{b}_1$: $[x_3 - 2, 3 - 2x_3, x_3]$, $x_3 \in \mathbf{R}$. Pro $\mathbf{b}_2$ a $\mathbf{b}_3$ nemá řešení.
Příklad 2: $D_f = \mathbf{R}^2$; $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (1+|x|)^{|y|} \cdot \frac{|y| \operatorname{sgn} x}{1+|x|}$ pro $[x, y] \in \mathbf{R}^2$, $x \neq 0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (1+|x|)^{|y|} \cdot \operatorname{sgn} y \cdot \log(1 + |x|)$ pro $[x, y] \in \mathbf{R}^2$, $x \neq 0$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ neexistuje pro $y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ neexistuje pro $x \neq 0$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Tečná rovina: $[x, y] \mapsto 2 + (x - 1) + 2 \log 2(y - 1)$.
Příklad 3: $f'(\pi) = 0$, $f''(\pi) = -\frac{1}{\pi}$, rovnice tečny je $y = 0$.
Příklad 4: Maximum ani supremum neexistuje, f není shora omezená na M ($[y+\frac{4-2y^2}{2y}, y, \frac{4-2y^2}{2y}] \in M$ pro každé $y \in (0, 1)$ a $\lim_{y\to 0+} f(y+\frac{4-2y^2}{2y}, y, \frac{4-2y^2}{2y}) = +\infty$). Minimum $2\sqrt{2}$ v bodě $[\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0]$. Je to skutečně minimum, protože $\{[x, y, z] \in M : f(x, y, z) \leq 10\}$ je kompaktní.
Příklad 5: Konverguje absolutně. Lze použít odmocninové kritérium.