Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (B)
LS 2004-2005

Příklad 1 : Pro která $x \in \mathbf{R}$ je následující matice regulární? Spočtěte inverzní matici v závislosti na x:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 14 \\ 10 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 7 & 4 & 4 & 7x \end{pmatrix}$$

(10 bodů)

Příklad 2 : Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2},$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici funkce, jejímž grafem je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $[-1, 0, f(-1,0)]$. (10 bodů)

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$x^y + y^x = 3$$

určuje v jistém okolí bodu $[1,2]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě 1. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x,y,z) = yz \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

(18 bodů)

Příklad 5 : Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje.

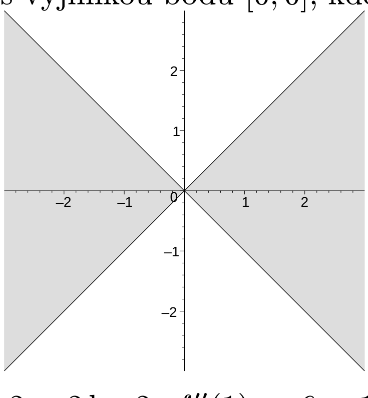
$$\sum_{n=18}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+17}}{\sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt[3]{n^3+17n}}$$

(12 bodů)

Výsledky písemky z Matematiky II pro FSV (B)
LS 2004-2005

Příklad 1: Matice je regulární pro všechna $x \in \mathbf{R}$. Inverzní matice je $\begin{pmatrix} -2 & 1 & x & -1 \\ -3 & 1 & x+2 & -1 \\ \frac{13}{2} & -\frac{11}{4} & -3x-2 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix}$.

Příklad 2: $D_f = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2 : |y| \leq |x|\}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$, obě derivace pro $[x,y] \in \mathbf{R}^2$ splňující $|y| < |x|$ (tedy v int D_f). Na hranici (tj. v bodech $[x,x]$ a $[x,-x]$) $\frac{\partial f}{\partial y}$ nemá smysl; $\frac{\partial f}{\partial x}$ nemá smysl s výjimkou bodu $[0,0]$, kde neexistuje. Tečná rovina: $[x,y] \mapsto 1 - (x+1)$.
Definiční obor:



Příklad 3: $f'(1) = -2 - 2\log 2$, $f''(1) = 6 + 12\log 2 + 2\log^2 2$, rovnice tečny je $y = 2 - (2 + 2\log 2)(x-1)$.
Příklad 4: Maximum 2 v bodech $[0,1,2]$ a $[0,-1,-2]$; minimum -2 v bodech $[0,1,-2]$ a $[0,-1,2]$. (M je kompaktní.)
Příklad 5: Diverguje. Není splněna nutná podmínka konvergence.