Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (A)
LS 2004-2005

Příklad 1 : Spočtěte determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 2 & 1 & 6 & 7 \\ 12 & 3 & 4 & 5 & 8 \\ 12 & 12 & 11 & 10 & 9 \end{vmatrix}$$ (10 bodů)

Příklad 2 : Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin \frac{|y|}{|x|+1},$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici funkce, jejímž grafem je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $[3,3,f(3,3)]$. (10 bodů)

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$x^2 e^{(y^2)} = ye^x$$

určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě 1. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

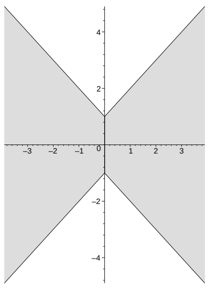
$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2z^2 = 1, x + y \leq 1\}$$ (18 bodů)

Příklad 5 : Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)! \cdot (2n+1)! \cdot (-7)^n}{(3n)!}$$ (12 bodů)

Výsledky písemky z Matematiky II pro FSV (A)
LS 2004-2005

Příklad 1: 132
Příklad 2: $D_f = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2 : |y| \leq |x|+1\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-|y| \operatorname{sgn} x}{(|x|+1)\sqrt{(|x|+1)^2 - y^2}}$ pro $[x,y] \in \mathbf{R}^2$, $|y| < |x|+1$, $y \neq 0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\operatorname{sgn} y}{\sqrt{(|x|+1)^2 - y^2}}$ pro $[x,y] \in \mathbf{R}^2$, $|y| < |x|+1$, $y \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ neexistuje pro $y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ neexistuje pro $x \in \mathbf{R}$, v bodech, kde $|y| = |x|+1$ parciální derivace nemá smysl počítat (s výjimkou $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,-1)$, které ovšem neexistují). Tečná rovina: $[x,y] \mapsto \arcsin \frac{3}{4} - \frac{3}{4\sqrt{7}}(x-3) + \frac{1}{\sqrt{7}}(y-3)$.
Definiční obor:



Příklad 3: $f'(1) = -1$, $f''(1) = -1$, rovnice tečny je $y = 1 - (x-1)$.
Příklad 4: Maximum ani supremum neexistuje, f není na M shora omezená ($[1,-n,0] \in M$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, $f(1,-n,0) \to +\infty$). Minimum $\frac{1}{2}$ v bodech $[0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}]$ a $[0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}}]$. Že to je skutečně minimum plyne z toho, že $\{[x,y,z] \in M : f(x,y,z) \leq 1\}$ je kompaktní.
Příklad 5: Diverguje. Lze použít podílové kritérium nebo nutnou podmínku konvergence.