Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (G)
ZS 2004-2005

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(25+\frac{1}{n}\right)^6-\left(5+\frac{1}{n}\right)^{12}\right)\cdot\sqrt[6]{(n+2)^7-(n-1)^7} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad 2 : Spočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{(2^{x+1}-2)}-1}{\sqrt{1-\cos x}} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x)=\min\{x,\sqrt[3]{x},x^2\}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).

(10 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{4}{x}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x. \qquad \text{(20 bodů)}$$

Příklad 5 : (Alespoň dvě úlohy je třeba vyřešit bezchybně)

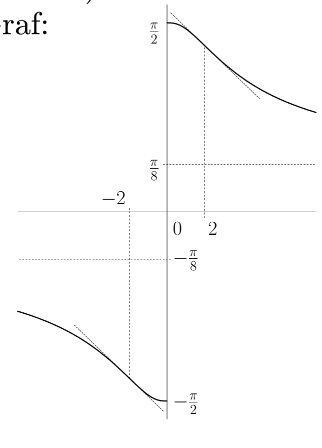
(a) Najděte všechna reálná řešení rovnice $(\log_{10}x)^2=\log_{10}(100x)$.
(b) Najděte všechna reálná řešení nerovnice $||x+2|-2|>1$.
(c) Načrtněte graf funkce $f(x)=(x-2)^3+8$.

Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (G)
ZS 2004-2005

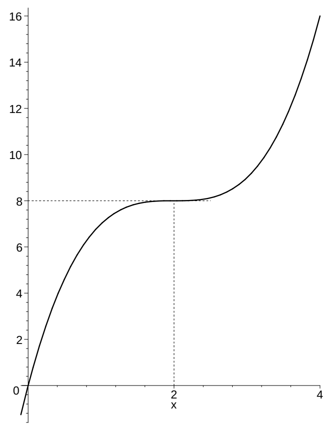
Příklad 1: $-54\cdot 5^{10}\cdot\sqrt[6]{21}$
Příklad 2: Neexistuje (zleva $-2\sqrt{2}\log 2\log 3$, zprava $2\sqrt{2}\log 2\log 3$)
Příklad 3: $D_f=\mathbf{R}$, f je spojitá na $\mathbf{R}$. $f'(x)=\begin{cases}1 & x\in(-\infty,1),\\ \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & x\in(-1,0)\cup(1,+\infty),\\ 2x & x\in(0,1).\end{cases}$

$f'_-(-1)=1$, $f'_+(-1)=\frac{1}{3}$, $f'_-(0)=+\infty$, $f'_+(0)=0$, $f'_-(1)=2$, $f'_+(1)=\frac{1}{3}$.
Příklad 4: $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, f je spojitá v každém bodě D_f, f je lichá, stačí vyšetřit na $(0,+\infty)$. Limita v 0 zprava ja $\frac{\pi}{2}$, limita v $+\infty$ je $\frac{\pi}{8}$. f je klesající na $(0,+\infty)$ (i na $(-\infty,0)$), $H_f=(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{8})\cup(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{2})$. f je konkávní na $(0,2\rangle$, konvexní na $\langle 2,+\infty)$, v bodě 2 je inflexní bod. Asymptota v $+\infty$ je $x\mapsto\frac{\pi}{8}$. (Chování na $(-\infty,0)$ lze odvodit z lichosti.)

Graf:



5(c):



Příklad 5: (a) 100, $\frac{1}{10}$ (b) $(-\infty,-5)\cup(-3,-1)\cup(1,+\infty)$