Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (C)
ZS 2004-2005

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt[3]{n^3-1}\right]+\left[\sqrt[3]{n^3+1}\right]}{\sqrt[n]{1+2^n+\cdots+n^n}} \qquad [\dots] \text{ znamená celou část} \qquad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Spočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{(x^2)^x + x^{(x^2)}}{2}\right)^{\frac{1}{x\log x}} \qquad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \cos x \cdot [\sin x] \qquad [\dots] \text{ znamená celou část}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).
(10 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{2x} + \operatorname{arctg} x. \qquad (20 \text{ bodů})$$

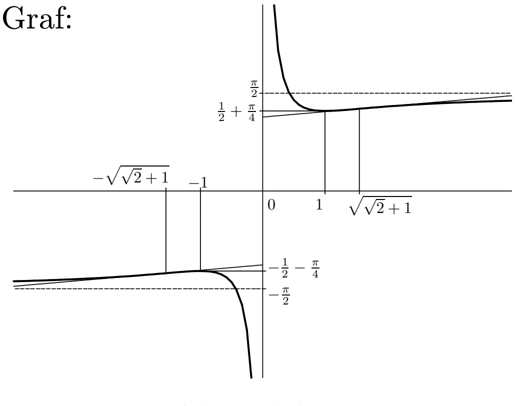
Příklad 5 : (Alespoň dvě úlohy je třeba vyřešit bezchybně)

(a) Najděte všechna reálná řešení rovnice $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$.
(b) Najděte všechna reálná řešení rovnice $1 - |x| = |1 - x|$.
(c) Načrtněte graf funkce $f(x) = \operatorname{cotg} \dfrac{x}{2}$.

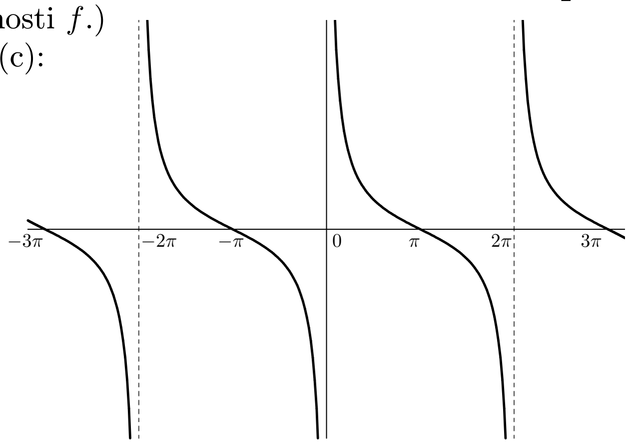
Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (C)
ZS 2004-2005

Příklad 1: 2
Příklad 2: e
Příklad 3: $D_f = \mathbf{R}$, f je spojitá v bodech $\mathbf{R}\setminus\{k\pi\colon k\in\mathbf{Z}\}$; v bodech $2k\pi$ je spojitá zprava, ale ne zleva; v bodech $(2k+1)\pi$ je spojitá zleva, ale ne zprava.
$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in \bigcup_{k\in\mathbf{Z}}(2k\pi,(2k+1)\pi), \\ -\cos x, & x \in \bigcup_{k\in\mathbf{Z}}((2k-1)\pi, 2k\pi); \end{cases}$ $f'_+(2k\pi) = f'_-((2k+1)\pi) = 0$, $f'_-(2k\pi) = f'_+((2k+1)\pi) = +\infty$ (pro $k\in\mathbf{Z}$).
Příklad 4: $D_f = \mathbf{R}\setminus\{0\}$, f je spojitá ve všech bodech D_f, f je lichá. Limita v 0 zprava je $+\infty$, limita v $+\infty$ je $\frac{\pi}{2}$. f je klesající na $(0,1\rangle$, rostoucí na $\langle 1,+\infty)$, v bodě 1 je lokální minimum, $H_f = (-\infty, -\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\rangle \cup \langle \frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}, +\infty)$. f je konvexní na $(0, \sqrt{\sqrt{2}+1}\rangle$, konkávní na $\langle\sqrt{\sqrt{2}+1}, +\infty)$, v bodě $\sqrt{\sqrt{2}+1}$ je inflexní bod. Asymptota v $+\infty$ je $x \mapsto \frac{\pi}{2}$. (Údaje o chování pro $x<0$ lze doplnit díky lichosti f.)

Graf:



5(c):



Příklad 5: (a) 64 (b) $\langle 0, 1\rangle$