Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (A)
ZS 2004-2005

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sin^2 n}-\sqrt{n-\cos^2 n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad 2 : Spočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 0-} \left(\frac{(\cos x)^x + 2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \min\{x^3, x\cdot|x|\}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).

(10 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[5]{3x^5+5x^3}. \qquad \text{(20 bodů)}$$

Příklad 5 : (Alespoň dvě úlohy je třeba vyřešit bezchybně)

(a) Najděte všechna reálná řešení rovnice $4^x + 2^x - 20 = 0$.
(b) Najděte všechna reálná řešení nerovnice $||x+1|-1| \le 2$.
(c) Načrtněte graf funkce $f(x) = \sin(2x+3)$.

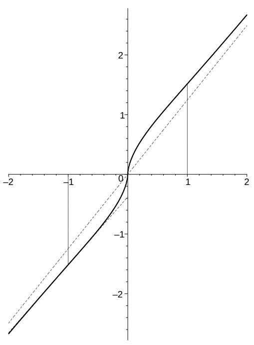
– –

Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (A)
ZS 2004-2005

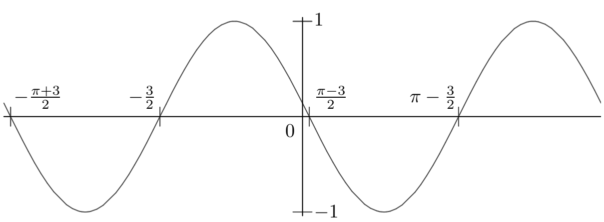
Příklad 1: $\frac{1}{2}$
Příklad 2: $\sqrt{2}$
Příklad 3: $D_f = \mathbf{R}$, f je spojitá na $\mathbf{R}$; $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x\in(-\infty,-1)\cup(0,1), \\ -2x & x\in(-1,0), \\ 2x & x\in(1,+\infty); \end{cases}$ $f'(0)=0$,

$f'_-(-1) = f'_-(1) = 3$, $f'_+(-1) = f'_+(1) = 2$.
Příklad 4: f je definovaná a spojitá na $\mathbf{R}$, je lichá, v $+\infty$ má limitu $+\infty$, je rostoucí na $\mathbf{R}$, $f'(0) = +\infty$, $H_f = \mathbf{R}$, f je konkávní na $\langle 0,1\rangle$, konvexní na $\langle 1,+\infty)$, v bodě 1 je inflexní bod. Asymptota v $+\infty$ (i v $-\infty$) je $x \mapsto \sqrt[5]{3}\cdot x$.

Graf:



5(c):



Příklad 5: (a) $x = 2$ (b) $x \in \langle -4, 2\rangle$