Písemná zkouška z Matematické analýzy I pro informatiky (G)
ZS 2003-2004, paralelky X a Z

Příklad 1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{5x^2+x+3})} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 2 : Zjistěte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+nx}{\sqrt{n^2+n^6x^2}}$$

konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje (v závislosti na parametru $x \in \mathbf{R}$).

(12 bodů)

Příklad 3 : Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = x^{([x]^x)} \qquad \text{([..] znamená celou část)}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).

(12 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$\frac{x+5}{\sqrt{x^2+25}}. \qquad \text{(24 bodů)}$$

Příklad 5 : (Každá z otázek (a) až (e) za 1 bod.)

(a) Je pravda, že pro každou posloupnost $\{a_n\}$ s limitou $+\infty$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že $a_{n+1} \geq a_n$ pro každé $n \geq n_0$? Pokud ne, uveďte příklad.

(b) Ať $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ splňuje $f'(5) = 0$. Musí být v bodě 5 lokální extrém? Pokud ne, uveďte příklad.

(c) Ať $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy a $\sqrt[n]{a_n} < 1$ pro každé $n \in \mathbf{N}$. Musí být $\sum a_n$ konvergentní? Pokud ne, uveďte příklad.

(d) Napište inverzní funkci k funkci $\operatorname{tg} x : (-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}) \to \mathbf{R}$.

(e) Ať $f : \mathbf{R} \to (0,1)$ rostoucí a $g : (0,1) \to \mathbf{R}$ klesající. Musí $g \circ f$ být nějak monotónní? Pokud ano, napište jak; pokud ne, uveďte příklad.