Písemná zkouška z Matematické analýzy I pro informatiky (F)
ZS 2003-2004, paralelky X a Z

Příklad 1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(2e^{\frac{4x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{3x}} \qquad (12 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Zjistěte, zda řada

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n}\operatorname{arctg}\left((-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje.

(12 bodů)

Příklad 3 : Spočtěte derivaci funkce

$$f(x)=(\max\{x,1\})^{[x]} \qquad ([..] \text{ znamená celou část})$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).

(12 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x)=\sin x\sin 2x. \qquad (24 \text{ bodů})$$

Příklad 5 : (Každá z otázek (a) až (e) za 1 bod.)

(a) Existují posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ takové, že $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = +\infty$ a $\lim a_n b_n$ neexistuje? Pokud ano, uveďte příklad.

(b) Je pravda, že pokud řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$? Pokud ne, uveďte příklad.

(c) Nechť funkce f je konvexní na intervalu $(0,1\rangle$ a také na intervalu $\langle 1,2)$. Musí pak f být konvexní na intervalu $(0,2)$? Pokud ne, uveďte příklad.

(d) Napište příklad funkce f, která je spojitá v bodě 1 a přitom $f'(1)$ neexistuje.

(e) Zformulujte větu, podle níž lze spočítat $\lim_{x\to 1-}\operatorname{tg}(\pi-2\operatorname{arctg} x)$, a vysvětlete její použití.