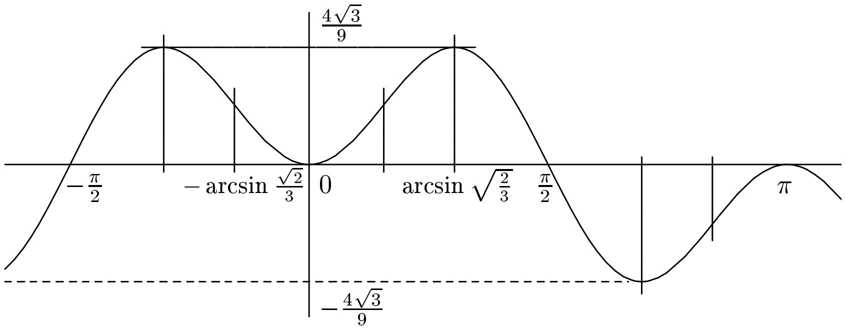
Výsledky písemky z Matematické analýzy I pro informatiky (F)
ZS 2003-2004, paralelky X a Z

Příklad 1: $e^{8/3}$
Příklad 2: Řada konverguje neabsolutně. Konvergence plyne z Leibnizova kritéria, divergence řady absolutních hodnot z limitního srovnávacího kritéria (nesymetrické verze, lze srovnat například s řadou $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$).
Příklad 3: $f'(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 1) \\ [x]x^{[x]-1} & x \in (1, +\infty) \setminus \mathbf{N} \end{cases}$. Pro $k \in \mathbf{N}$ je $f'_+(k) = k^k$, $f'_-(1) = 0$ a $f'_-(k) = +\infty$ pro $k > 1$.
Příklad 4: $D_f = \mathbf{R}$, f je spojitá na $\mathbf{R}$. f je sudá a 2π-periodická, zkoumáme tedy na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. f je rostoucí na $\langle 0, \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\rangle$ a na $\langle \pi - \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}, \pi\rangle$, klesající na $\langle \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}, \pi - \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\rangle$. $f(0) = f(\pi) = 0$, $f(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}) = \frac{4}{9}\sqrt{3}$, $f(\pi - \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}) = -\frac{4}{9}\sqrt{3}$. V bodě 0 je lokální minimum, v bodě π lokální maximum, v bodě $\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$ globální maximum, v bodě $\pi - \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$ globální minimum, $H_f = \langle -\frac{4}{9}\sqrt{3}, \frac{4}{9}\sqrt{3}\rangle$. f je konvexní na $\langle 0, \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}\rangle$ (a tedy i na $\langle -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}, \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}\rangle$) a na $\frac{\pi}{2}, \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}\rangle$, konkávní na $\langle \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\pi}{2}\rangle$ a na $\langle \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}, \pi\rangle$ (a tedy i na $\langle \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}, \pi + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}\rangle$). Asymptoty f nemá, protože je periodická a nekonstantní.



Příklad 5: (a) ANO. Například $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ a $b_n = n$. (b) NE. Například $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. (c) NE. Například $f(x) = \begin{cases} (x - \frac{1}{2})^2 & x \in (0, 1\rangle \\ (x - \frac{3}{2})^2 & x \in \langle 1, 2) \end{cases}$. (d) Například $f(x) = |x - 1|$. (e) Nechť $\lim_{x\to 1-} g(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{y \to \frac{\pi}{2}+} f(y) = -\infty$ a existuje $\delta > 0$, že pro $x \in (1 - \delta, 1)$ je $g(x) > \frac{\pi}{2}$. Pak $\lim_{x \to 1-} f(g(x)) = -\infty$. Aplikujeme pro $g(x) = \pi - 2\operatorname{arctg} x$, $f(y) = \operatorname{tg} y$ a například $\delta = 1$.