Písemná zkouška z Matematické analýzy I pro informatiky (E)
ZS 2003-2004, paralelky X a Z

Příklad 1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\pi(x - \frac{\pi}{4}))}{\cos 2x} \cdot (x - \frac{\pi}{4})^k \,, \quad k \in \mathbf{Z} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 2 : Zjistěte, zda řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\log \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \right)^{\frac{\alpha}{7}}$$

konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje (v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbf{Z}$).

(12 bodů)

Příklad 3 : Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = (x^2 + x) \cdot \sqrt{1 - \cos x}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).

(12 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x}{2^{|x-1|}}. \qquad \text{(24 bodů)}$$

Příklad 5 : (Každá z otázek (a) až (e) za 1 bod.)

(a) Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost s limitou $a \in \mathbf{R}$. Může se stát, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ je a_n racionální číslo a přitom a není racionální? Pokud ano, uveďte příklad.

(b) Může se stát, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergují a přitom řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ konverguje? Pokud ano, uveďte příklad.

(c) Napište příklad funkce definované na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, která na tomto intervalu nenabývá maxima ani minima.

(d) Nechť funkce f je spojitá v bodě 3. Musí existovat $f'_+(3)$? Pokud ne, uveďte příklad.

(e) Zformulujte větu, podle níž lze spočítat derivaci funkce $\sin(\log x)$ v bodě 1, a vysvětlete její použití.