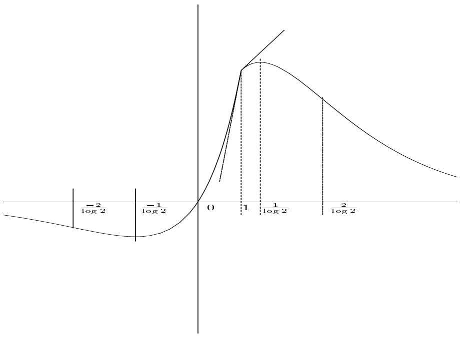
Výsledky písemky z Matematické analýzy I pro informatiky (E)
ZS 2003-2004, paralelky X a Z

Příklad 1: 0 pro $k > 0$, $-\frac{\pi}{2}$ pro $k = 0$, $-\infty$ pro $k < 0$ sudé, limita neexistuje (zprava $-\infty$, zleva $+\infty$ pro $k < 0$ liché.

Příklad 2: Řada konverguje absolutně, právě když $\alpha > 7$ (řadu absolutních hodnot lze srovnat s řadou $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha/7}}$). Pro $\alpha = 1, 3, 5, 7$ řada konverguje neabsolutně (pro důkaz konvergence lze použít Leibnizovo kritérium). V ostatních případech řada diverguje (pro $\alpha \leq 0$ není splněna nutná podmínka konvergence, pro $\alpha = 2, 4, 6$ má řada nezáporné členy, a tak lze využít výsledků o absolutní konvergenci).

Příklad 3: $f'(x) = (2x+1)\sqrt{1-\cos x} + (x^2+x) \cdot \frac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}}$ pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi\colon k \in \mathbf{Z}\}$; $f'(0) = 0$; pro $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ je $f'_+(2k\pi) = (4k^2\pi^2 + 2k\pi)\frac{\sqrt{2}}{2}$ a $f'_-(2k\pi) = -(4k^2\pi^2 + 2k\pi)\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Příklad 4: $D_f = \mathbf{R}$, f je spojitá na $\mathbf{R}$, limity v $\pm\infty$ jsou 0. Derivace neexistuje v bodě 1, $f'_-(1) = 1 + \log 2$, $f'_+(1) = 1 - \log 2$. f je rostoucí na $\langle -\frac{1}{\log 2}, \frac{1}{\log 2} \rangle$, klesající na $(-\infty, -\frac{1}{\log 2}\rangle$ a na $\langle \frac{1}{\log 2}, +\infty)$; v bodě $-\frac{1}{\log 2}$ je globální minimum, v bodě $\frac{1}{\log 2}$ je globální maximum; $H_f = \langle f(-\frac{1}{\log 2}), f(-\frac{1}{\log 2}) \rangle = \langle -\frac{1}{2e\log 2}, \frac{2}{e\log 2} \rangle$. f je konvexní na $\langle -\frac{2}{\log 2}, 1 \rangle$ a na $\langle \frac{2}{\log 2}, +\infty)$, konkávní na $(-\infty, \frac{2}{\log 2}\rangle$ a na $\langle 1, \frac{1}{\log 2} \rangle$, v bodech $-\frac{2}{\log 2}$ a $\frac{2}{\log 2}$ jsou inflexní body. Asymptota v $+\infty$ i $-\infty$ je $y = 0$.



Příklad 5: (a) ANO. Například $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. (b) ANO. Například $a_n = (-1)^n$ a $b_n = (-1)^{n+1}$. (c) Například $f(x) = \begin{cases} x & x \in (0,1), \\ \frac{1}{2} & x \in \{0,1\}. \end{cases}$ (d) NE. Například $f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ racionální} \\ x-3 & x \text{ iracionální} \end{cases}$. (e) Věta o derivaci složené funkce: Nechť funkce g má vlastní derivaci v bodě 1, $g(1) = 0$ a funkce f má vlastní derivaci v bodě 0. Pak funkce $f \circ g$ má derivaci v bodě 1 rovnou $f'(0) \cdot g'(1)$. Použijeme pro $g(x) = \log x$ a $f(x) = \sin x$.