Písemná zkouška z Matematické analýzy I pro informatiky (C)
ZS 2003-2004, paralelky X a Z

Příklad 1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0+} (\sin x)^{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3-x^2}} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 2 : Zjistěte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}} \cdot x^n$$

konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje (v závislosti na parametru $x \in \mathbf{R}$).

(12 bodů)

Příklad 3 : Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = (x^2+1)^{\min\{x, x^3, 1/2\}}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).

(12 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2+x}{3-x}. \qquad \text{(24 bodů)}$$

Příklad 5 : (Každá z otázek (a) až (e) za 1 bod.)

(a) Napište příklad posloupnosti, která nemá konvergentní podposloupnost.

(b) Je pravda, že pokud konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? Pokud ne, uveďte příklad.

(c) Nechť funkce f je rostoucí na intervalu $(0,1\rangle$ a také na intervalu $\langle 1,2)$. Musí pak f být rostoucí na intervalu $(0,2)$? Pokud ne, uveďte příklad.

(d) Nechť funkce f má v bodě 4 lokální maximum. Může být $f'_-(4) < 0$? Pokud ano, uveďte příklad.

(e) Označme $f(x) = \operatorname{arctg}(1-\frac{2}{x})$, $x \in (0,+\infty)$. Zformulujte větu, podle níž lze spočítat $(f^{-1})'(0)$, a vysvětlete její použití.