Výsledky písemky z Matematické analýzy I pro informatiky (C)

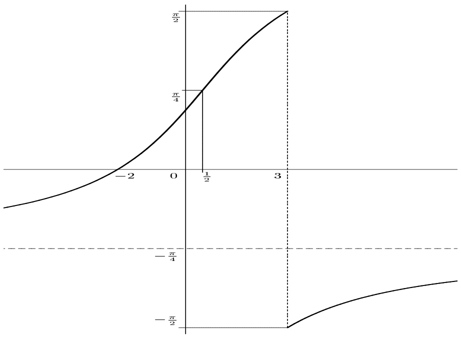
ZS 2003-2004, paralelky X a Z

Příklad 1: 1

Příklad 2: Pro $x \in \langle -1, 1\rangle$ řada konverguje absolutně, pro $|x| > 1$ diverguje. Pro $x \neq \pm 1$ lze použít odmocninové kritérium, pro $x \pm 1$ limitní srovnávací kritérium (nesymetrickou verzi) a srovnat například s řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Příklad 3: $f'(x) = \begin{cases} (x^2+1)^{(x^3)} \cdot \left(3x^2 \log(x^2+1) + \frac{2x^4}{x^2+1}\right) & x \in (-\infty, -1) \cup (0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}), \\ (x^2+1)^x \cdot \left(\log(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}\right) & x \in (-1, 0), \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} & x \in (\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty); \end{cases}$ $f'(0) = 0$, $f'_-(-1) = \frac{3\log 2+1}{2}$, $f'_+(-1) = \frac{\log 2+1}{2}$, $f'_-(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}) = \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt[3]{4}} \log\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) + \frac{\sqrt[3]{4}}{1+\sqrt[3]{4}}\right)$, $f'_+(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}) = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{4}}}$.

Příklad 4: $D_f = \mathbf{R} \setminus \{3\}$, f je spojitá v každém bodě D_f. Limita v $+\infty$ i v $-\infty$ je $-\frac{\pi}{4}$, $\lim_{x\to 3-} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \to 3+} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, f je rostoucí na $(-\infty, 3)$ i na $(3, +\infty)$, f je konvexní na $(-\infty, \frac{1}{2})$, konkávní na $(\frac{1}{2}, 3)$ a na $(3, +\infty)$. $H_f = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}) \cup (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, asymptota v $+\infty$ i v $-\infty$ je $y = -\frac{\pi}{4}$.



Příklad 5: (a) Například $\{n\}_{n=1}^{\infty}$. (b) ANO. (Plyne to z věty o aritmetice řad.) (c) ANO. (Pokud $x \in (0, 1)$ a $y \in (0, 2)$, pak $f(x) < f(1) < f(y)$. (d) NE. (Pokud $f'_-(4) < 0$, pak existuje $\delta > 0$, že pro $x \in (4 - \delta, 4)$ platí $f(x) > f(4)$. (e) Věta o derivaci inverzní funkce: f je spojitá na $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{\frac{2}{x^2}}{1+(1-\frac{2}{x})^2} > 0$ na $(0, +\infty)$, f je tedy rostoucí na $(0, +\infty)$. Je $f(2) = 0$, a tedy $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(2)} = 2$.