Písemná zkouška z Matematické analýzy I pro informatiky (B)

ZS 2003-2004, paralelky X a Z

Příklad 1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} [(x+2)\log(x+1) - (x+3)\log(x+2) + \log x] \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 2 : Zjistěte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{2}{n})^{n^2}}{1+2^n+3^n}$$

konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje.

(12 bodů)

Příklad 3 : Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = |\sin 2x| \cdot \sin x$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).

(12 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = e^{-2x}\sqrt[3]{x^2}. \qquad \text{(24 bodů)}$$

Příklad 5 : (Každá z otázek (a) až (e) za 1 bod.)

(a) Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost s limitou $a \in \mathbf{R}$. Může se stát, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ je a_n celé číslo a přitom a není celé? Pokud ano, uveďte příklad.

(b) Je pravda, že konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$? Pokud ne, uveďte příklad.

(c) Napište příklad funkce f definované na intervalu $\langle 0,1\rangle$ takové, že množina $f(\langle 0,1\rangle)$ není ani interval ani jednobodová množina.

(d) Nechť funkce f má v bodě 1 lokální extrém a existuje $f'_+(1)$. Musí být $f'_+(1) = 0$? Pokud ne, uveďte příklad.

(e) Napište příklad funkce, která není spojitá v bodě 7 a přitom platí $f'_+(7) = 2$.