V.9 Kvazikonkávní funkce

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní množina a funkce f je definována na M. Řekneme, že f je

- **kvazikonkávní na** M**,** jestliže
  $$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M, f(\boldsymbol{b}) \geq f(\boldsymbol{a}) \ \forall t \in \langle 0,1\rangle : \ f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) \geq f(\boldsymbol{a}),$$
- **ryze kvazikonkávní na** M, jestliže
  $$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}, f(\boldsymbol{b}) \geq f(\boldsymbol{a}) \, \forall t \in (0,1) : \ f(t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}) > f(a).$$

Poznámky. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní množina a f je funkce definovaná na M.

(i) Funkce f je kvazikonkávní na M, právě když
$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M \, \forall t \in \langle 0,1\rangle : \ f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) \geq \min\{f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})\}.$$

(ii) Funkce f je ryze kvazikonkávní na M, právě když
$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M, \ \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b} \, \forall t \in (0,1) : \ f(t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}) > \min\{f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})\}.$$

(iii) Je-li f konkávní na M, pak je i kvazikonkávní na M.

(iv) Je-li f ryze konkávní na M, pak je i ryze kvazikonkávní na M.

Věta 24 (o jednoznačnosti extrému). *Nechť f je ryze kvazikonkávní funkce na konvexní množině $M \subset \mathbf{R}^n$. Pokud f nabývá na M svého maxima, pak ho nabývá právě v jednom bodě.*

Důsledek. *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní, kompaktní a neprázdná množina a f je spojitá a ryze kvazikonkávní funkce na M. Pak f nabývá maxima na M právě v jednom bodě.*

Věta 25 (charakterizace kvazikonkávních funkcí pomocí úrovňových množin). *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní množina a f je funkce definovaná na M. Funkce f je kvazikonkávní na M právě tehdy, když pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$ je množina*
$$Q_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in M; f(\boldsymbol{x}) \geq \alpha\}$$
konvexní.

Věta 26 (charakterizace kvazikonkávních funkcí třídy C^1). *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní otevřená množina a $f \in C^1(G)$. Pak funkce f je kvazikonkávní na G právě tehdy, když platí*
$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G, \ f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) : \ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})(y_i - x_i) \geq 0.$$

Věta 27 (postačující podmínka pro ryzí kvazikonkávnost funkce třídy C^1). *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní otevřená množina a $f \in C^1(G)$. Jestliže platí*
$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G, \ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}, f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) : \ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})(y_i - x_i) > 0,$$
pak f je ryze kvazikonkávní na G.