V.6 Věta o implicitních funkcích

Věta 15 (o implicitní funkci). *Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F : G \to \mathbb{R}$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí:*

(i) $F \in C^1(G)$,
(ii) $F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) = 0$,
(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) \neq 0$.

Pak existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}$ bodu $\tilde{y}$ tak, že pro každé $\boldsymbol{x} \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$ a píšeme-li $y = \varphi(\boldsymbol{x})$, pak $\varphi \in C^1(U)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x}))},$$

pro $\boldsymbol{x} \in U$ a $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Poznámka. Je-li navíc F třídy C^k, je i φ třídy C^k.

Věta 16 (o implicitních funkcích). *Nechť $m, n \in \mathbf{N}$, $G \subset \mathbf{R}^{m+n}$ je otevřená množina, $F_j : G \to \mathbf{R}$ pro $j \in \{1, \ldots, m\}$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{\boldsymbol{y}} \in \mathbf{R}^m$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}] \in G$ a nechť platí:*

(i) $F_j \in C^1(G)$ *pro* $j \in \{1, \ldots, m\}$;
(ii) $F_j(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) = 0$ *pro* $j \in \{1, \ldots, m\}$;
(iii) $\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \end{vmatrix} \neq 0.$

Pak existuje okolí $U \subset \mathbf{R}^n$ bodu $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a okolí $V \subset \mathbf{R}^m$ bodu $\tilde{\boldsymbol{y}}$ tak, že pro každé $\boldsymbol{x} \in U$ existuje právě jedno $\boldsymbol{y} \in V$ s vlastností $F_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ pro každé $j \in \{1, \ldots, m\}$. Označíme-li souřadnice tohoto $\boldsymbol{y}$ jako $[\varphi_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \varphi_m(\boldsymbol{x})]$, pak $\varphi_j \in C^1(U)$ pro $j \in \{1, \ldots, m\}$. Jsou-li navíc funkce $F_1, \ldots, F_m$ třídy C^k, jsou i funkce $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ třídy C^k.

Poznámka. Symbol v podmínce (iii) Věty 16 je **determinant**. Definován bude později. Pro $m = 1$ jde o podmínku (iii) z Věty 15, pro $m = 2$ jest $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$