VII.1 Číselné řady – základní pojmy a vlastnosti

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel.

- Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **nekonečnou řadou**.
- Číslo a_n budeme nazývat **n-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Pro $m \in \mathbb{N}$ položme $s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$. Číslo s_m nazveme **m-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- **Součtem nekonečné řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje**, je-li její součet reálné číslo. V opačném případě řekneme, že řada **diverguje**.

Možné chování řady.

$$\text{Řada } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{konverguje, tj. jejím součtem je reálné číslo} \\ \text{diverguje} \begin{cases} \text{má součet } +\infty \text{ nebo } -\infty \\ \text{nemá součet (\textbf{osciluje})} \end{cases} \end{cases}$$

Věta 1 (nutná podmínka konvergence řady). *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom* $\lim a_n = 0$.

Větička 2.

(i) *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\lambda \in \mathbf{R}$. Pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ a platí $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

(ii) *Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují. Pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ a platí $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Poznámky.

(1) Mějme dvě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Jestliže existuje $n_0 \in \mathbf{N}$, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje (tj. buď obě řady konvergují nebo obě divergují).

(2) Nechť $N \in \mathbf{N}$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+N-1}$.

VII.2 Řady s nezápornými členy a absolutní konvergence

Poznámka. Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nezápornými členy (tj. $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbf{N}$), pak tato řada buď konverguje nebo má součet $+\infty$.

Věta 3 (srovnávací kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou dvě řady splňující $0 \leq a_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.*

(i) *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, je rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.*
(ii) *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, je rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní.*

Definice. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je konvergentní.

Věta 4. *Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, je rovněž konvergentní.*

Věta 3' (srovnávací kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou dvě řady, pro které existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro $n \in \mathbf{N}$, $n > n_0$ platí $0 \leq a_n \leq b_n$.*

(i) *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, je rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.*
(ii) *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, je rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní.*

Věta 5 (limitní srovnávací kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy.*

(a) *Jestliže existuje vlastní $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n/b_n$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*
(b) *Jestliže $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n/b_n = c \in (0, +\infty)$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Poznámka. Z Věty 4 a Věty 5 plyne: Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou dvě řady, přičemž druhá z nich má kladné členy. Jestliže existuje vlastní limita $\lim |a_n/b_n|$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (dokonce absolutně).

Věta 6 (Cauchyovo odmocninové kritérium). *Budiž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada. Potom platí:*

(i) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.*
(ii) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.*

Věta 7 (d'Alembertovo podílové kritérium). *Budiž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nenulovými členy. Potom platí:*

(i) *Je-li* $\lim |a_{n+1}|/|a_n| < 1$, *je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.*
(ii) *Je-li* $\lim |a_{n+1}|/|a_n| > 1$, *je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.*

Věta 8. *Nechť $\alpha \in \mathbf{R}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.*