I. Lze následující funkce spojitě rozšířit na celou rovinu ?

1. $\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$ **2.** $(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ **3.** $xy\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ **4.** $y^3\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ **5.** $\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

6. $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **7.** $\frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$ **8.** $\frac{\sin xy}{x}$

Zkoumejte chování parciálních derivací a diferencovatelnost (ev. spojitě dodefinovaných) funkcí

9. $\sqrt{|xy|}$ **10.** $|x|\cdot|y|$ **11.** $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **12.** $(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

13. $xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (druhé smíšené derivace)

Výsledky a návody. **1.** Ne. **2.** Ne. Ale při dodefinování $f(x,0)=f(0,y)=0$ je f spojitá ještě v $(0,0)$, $(0,\frac{1}{k\pi})$, $(\frac{1}{k\pi},0)$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. **3.** Ano. $f(x,0)=f(0,y)=0$. **4.** Ne. Ale při dodefinování $f(x,0)=f(0,y)=0$ je f spojitá ještě v $(x,0)$, $x\in\mathbb{R}$ a $(0,\frac{1}{k\pi})$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. **5.** Ne. **6.** Ano. $f(0,0)=0$ **7.** Ano. $f(0,0)=0$ **8.** Ano. $f(0,y)=y$ **9.** $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, ale f nemá v $(0,0)$ diferenciál. Parciální derivace jsou neomezené na okolí 0. **10.** f má v $(0,0)$ diferenciál, ale parciální derivace nejsou definovány na okolí $(0,0)$. **11.** Dodefinovat $f(0,0)=0$. $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ existují a jsou omezené v okolí $(0,0)$, ale v $(0,0)$ neexistuje diferenciál. **12.** Dodefinovat $f(0,0)=0$. f má v $(0,0)$ diferenciál, ale $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ nejsou omezené na žádném okolí $(0,0)$. **13.** Dodefinovat $f(0,0)$. f je všude diferencovatelná, parciální derivace prvního řádu jsou spojité. $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ jsou omezené na okolí $(0,0)$ ale nejsou spojité v $(0,0)$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=-1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=1$

II. Funkce dvou proměnných – derivace složených funkcí

1. Najděte parciální derivace prvního a druhého řádu funkce $g(x,y)=$ (a) $f(x+y,xy)$ (b) $f(xy,\frac{x}{y})$.

Pro další příklady položme $\triangle f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

2. Spočtěte $\triangle f$ pro $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$. **3.** Vyjádřete $\triangle(f\cdot g)$.

4. Nechť $\triangle f=0$ a $g(x,y)=f(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2})$. Spočtěte $\triangle g$.

5. Nechť $\triangle f=\triangle g=0$. Položme $F(x,y)=f(x,y)+(x^2+y^2)g(x,y)$. Spočtěte $\triangle(\triangle F)$.

6. Vyjádřete $\triangle f$ v polárních souřadnicích.

7. Nechť funkce $u(x,y)$ splňuje rovnice $u(x,x^2)=1$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,x^2)=x$. Najděte $\frac{\partial u}{\partial y}(x,x^2)$.

8. Nechť funkce $u(x,y)$ splňuje rovnice $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $u(x,2x)=x$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,2x)=x^2$. Spočtěte parciální derivace druhého řádu v bodě $(x,2x)$.

Výsledky a návody. **1.** (a) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\partial_1 f(x+y,xy)+y\partial_2 f(x+y,xy)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\partial_1 f(x+y,xy)+x\partial_2 f(x+y,xy)$, pokud f má diferenciál v $(x+y,xy)$. (b) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=y\partial_1 f(xy,\frac{x}{y})+\frac{1}{y}\partial_2 f(xy,\frac{x}{y})$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=x\partial_1 f(xy,\frac{x}{y})-\frac{x}{y^2}\partial_2 f(xy,\frac{x}{y})$, pokud f má diferenciál v $(xy,\frac{x}{y})$. **2.** 0 **3.** $\triangle(f\cdot g)=f\cdot\triangle g+2\nabla f\cdot\nabla g+\triangle f\cdot g$, kde $\nabla f=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})$, a tedy $\nabla f\cdot\nabla g=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}$. **4.** 0 **5.** 0 **6.** $\triangle f=\frac{\partial^2 f^*}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f^*}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f^*}{\partial r}$ **7.** $-\frac{1}{2}$ pro $x\neq 0$ **8.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,2x)=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,2x)=-\frac{4}{3}x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,2x)=\frac{5}{3}x$

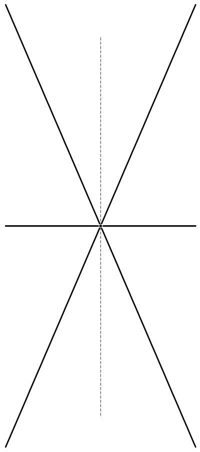
III. Načrtněte křivky určené těmito rovnicemi

1. $y=2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ **2.** $x^2+2xy-y^2=a^2$ $a\in\mathbb{R}$ **3.** $\log\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

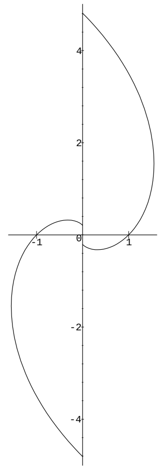
4. $x^2+y^2=x^4+y^4$ **5.** $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ **6.** $x^2+y^2=e^{xy-1+\log 2}$

VÝSLEDKY A NÁVODY.

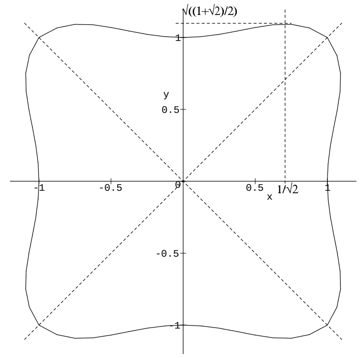
1.



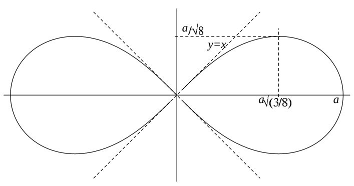
3.



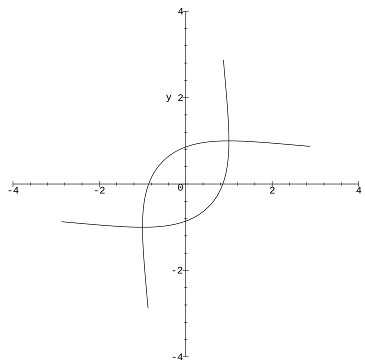
4.



5.



6.



IV. SPOČTĚTE PRIMITIVNÍ FUNKCE

1. $\int x^5 e^{x^3}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int \arcsin^2 x\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int x\,\mathrm{arctg}^2\, x\,\mathrm{d}x$ **4.** $\int \frac{x\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ **5.** $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$
6. $\int \sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x$ **7.** $\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ **8.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$ **9.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$ **10.** $\int x\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$
11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}$ **12.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}$ **13.** $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,\mathrm{d}x$ **14.** $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,\mathrm{d}x$ **15.** $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}\,\mathrm{d}x,\ a>0$
16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$ **17.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$ **18.** $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}$

VÝSLEDKY A NÁVODY. Výsledky jsou uvedeny „až na konstantu“. **1.** $\frac{1}{3}e^{x^3}(x^3-1)$ **2.** $x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x$ **3.** $\frac{x^2+1}{2}\,\mathrm{arctg}\, x - x\,\mathrm{arctg}\, x + \frac{1}{2}\log(x^2+1)$
4. $\sqrt{1+x^2}\log\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)-x$ **5.** $\frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$ **6.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\log\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)$
7. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ **8.** $\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ **9.** $\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$ **10.** $2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+6(x-2)\sin\sqrt{x}$ **11.** $\frac{1}{4}\log\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ **12.** $\frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\, x+\frac{1}{6}\,\mathrm{arctg}(2x-\sqrt{3})+\frac{1}{6}\,\mathrm{arctg}(2x+\sqrt{3})+\frac{\sqrt{3}}{12}\log\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}$ **13.** $\frac{1}{n}(x^n-\log|x^n+1|)$ **14.** použijte substituci $\sqrt[3]{2+x}=t$ **15.** substituce $t^4=\frac{x}{a-x}$ **16.** substituce $t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$ **17.** substituce $\sqrt{1-2x-x^2}=xt-1$ **18.** substituce $t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

V. Primitivní funkce

1. Za jakých podmínek je následující primitivní funkce racionální funkcí ?

(a) $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,dx$ (b) $\int \frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{(ax^2+bx+c)^2}\,dx$

2. Za jakých podmínek je primitivní funkce $\int \frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ algebraickou funkcí ?

3. Za jakých podmínek je primitivní funkce $\int P(\frac{1}{x})e^x\,dx$,
kde $P(\frac{1}{x}) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, elementární funkcí ?

4. Spočtěte primitivní funkce (a) $\int e^{-|x|}\,dx$ (b) $\int \max(1, x^2)\,dx$ (c) $\int [x]|\sin \pi x|\,dx$

5. Najděte $f(x)$, pokud (a) $f'(x^2) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ (b) $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$

(c) $f'(\log x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \le 1 \\ x & 1 < x < +\infty \end{cases}$, $f(0) = 0$

VI. Spočtěte následující integrály

1. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ **2.** $\int_{e^{-2\pi n}}^{1} \left|\cos\log\frac{1}{x}\right|\,dx$ **3.** $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx$ **4.** a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x\,dx$ **5.** a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ **6.** $\int_0^{1} (1-x^2)^n\,dx$ **7.** $\int_0^{1} \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **8.** $\int_0^{1} x^m \log^n x\,dx$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1} dx$ **10.** $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}$ **11.** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n}$, $ac-b^2 > 0$

Výsledky a návody. **1.** $\frac{\pi^2}{4}$, rozdělit na $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ a $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ **2.** substituce $x = e^t$ a rozdělit na několik intervalů **3.** $\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$, substituce $t = x + \frac{1}{x}$ **4.** $-\frac{\pi}{2}\log 2$, dokázat, že integrály a),b) se rovnají a vyjádřit sin pomocí polovičního argumentu **5.** a) i b) $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$ **6.** $I_0 = 1$, $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}I_n$, možno též převést na předchozí příklad **7.** převést na předminulý příklad např. $x = \sin t$ **8.** $\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$ **9.** substituce $\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x} = t$ **10.** $n!$ **11.** $I_{n+1} = \frac{(2n-1)a}{2n(ac-b^2)}I_n$

VII. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů konvergují (ev. absolutně konvergují) následující Newtonovy integrály

1. $\int_0^\infty e^{\alpha x^2+\beta x}x^\gamma \sin x\,dx$ **2.** $\int_0^\infty x^\alpha \arcsin\frac{x}{x^2+1}\sin\frac{1}{x}\,dx$ **3.** $\int_0^\infty \operatorname{arctg}^\alpha x \frac{\sin \pi x}{|\ln x|^\beta}\,dx$

4. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x+\cos x}\,dx$ **5.** $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\cos x}\,dx$ **6.** $\int_0^\infty x^p \sin(x^q)\,dx$ **7.** $\int_0^\infty \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^u}\,dx$

8. Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{k}]}}{k}$.

9. Rozhodněte, zda platí: (a) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ existuje a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Rightarrow L = 0$.
(b) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ existuje $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. (c) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ existuje $\Rightarrow f$ je omezená na okolí $+\infty$.

Výsledky a návody. **1.** KA: $\alpha < 0$ & $\gamma > -2$, nebo $\alpha = 0$ & $\beta < 0$ & $\gamma > -2$, nebo $\alpha = \beta = 0$ & $\gamma \in (-2, -1)$; KnA: $\alpha = \beta = 0$ & $\gamma \in [-1, 0)$ **2.** KA: $\alpha > -2$; KnA: $\alpha \in (-3, -2]$ **3.** KA: nikdy; KnA: $\alpha > -2$ & $\beta \in (0, 2)$, nebo $\alpha = -2$ & $\beta \in (1, 2)$ **4.** konverguje neabsolutně **5.** konverguje neabsolutně **6.** KA: $-1 > p > -1-q$ nebo $-1 < p < -1-q$; KnA: $-1 \le p < -1+q$ nebo $-1 \ge p > -1+q$ **7.** KA: nikdy; KnA: $u \in (0, 2)$ **8.** konverguje (neabsolutně), uzávorkujte členy se stejným znaménkem, odhadněte pomocí integrálu, a uvědomte si, že lze použít Leibnizovo kritérium. **9.** (a) ANO (použijte srovnávací kritérium na f a $\frac{L}{2}$) (b) NE, např. $f(x) = \sin x^2$ (lze i $f \ge 0$) (c) NE, např $f(x) = 2x \sin x^4$ (lze i $f \ge 0$)

VIII. Konečná tělesa

1. Dokažte, že neexistuje těleso, které má právě 6 prvků (elementárně, bez odkazů na věty).

2. Pro která p je polynom a) $x^2 + 1$ b) $x^2 + x + 1$ ireducibilní nad $\mathbb{Z}_p$?

3. a) Napište všechny polynomy stupně nejvýš 3 nad tělesem $\mathbb{Z}_2$.
b) Napište všechny polynomy stupně nejvýš 2 nad tělesy $\mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_5$.

4. Které z polynomů z předchozího příkladu jsou ireducibilní ?

5. Sestrojte těleso, které má a) 4 prvky; b) 9 prvků; c) 8 prvků.

Výsledky a návody. **1.** Nejprve si uvědomme, že $n \times 1 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ krát}}$ je pro nějaké n rovno 0, a že první takové n musí být prvočíslo. Nechť je to například 2. Pak T obsahuje 0 a 1. Obsahuje-li další prvek a, jsou prvky $0, 1, a, a+1$ navzájem různé. Obsahuje-li další prvek b, jsou prvky $0, 1, a, a+1, b, b+1, b+a, b+a+1$ navzájem různé. Atd. Tedy počet prvků T je mocnina 2, což 6 není. Analogicky pro další prvočísla. **2.** Lze to vyjádřit různě. Např. tak, že onen polynom má v $\mathbb{Z}_p$ kořen, tj. např. pro x^2+1 existuje $k \in \mathbb{Z}_p$, že $k \cdot k + 1 = 0$ v $\mathbb{Z}_p$, neboli p dělí k^2+1 pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Tedy např. nad $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_5$ je x^2+1 reducibilní a nad $\mathbb{Z}_3$ nikoli. **3.** a) 1, x, $x+1$, x^2, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1, x^3, x^3+1, x^3+x, x^3+x+1, x^3+x^2, x^3+x^2+1, x^3+x^2+x, x^3+x^2+x+1 b) 1, x, $x+1$, $x+2$, x^2, x^2+1, x^2+2, x^2+x, x^2+2x, x^2+x+1, x^2+x+2, x^2+2x+1, x^2+2x+2 a ještě 2-násobky všech těchto polynomů. Pro $\mathbb{Z}_5$ analogicky. **4.** $\mathbb{Z}_2$: 1, x, $x+1$, x^2+x+1, x^3+x+1, x^3+x^2+1. $\mathbb{Z}_3$: 1, x, $x+1$, $x+2$, x^2+1, x^2+x+2, x^2+2x+2

5. a)

$+$	0	1	α	β
0	0	1	α	β
1	1	0	β	α
α	α	β	0	1
β	β	α	1	0

$\cdot$	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	β	1
β	0	β	1	α

b)

$+$	0	1	2	a	b	c	d	e	f
0	0	1	2	a	b	c	d	e	f
1	1	2	0	b	c	a	e	f	d
2	2	0	1	c	a	b	f	d	e
a	a	b	c	d	e	f	0	1	2
b	b	c	a	e	f	d	1	2	0
c	c	a	b	f	d	e	2	0	1
d	d	e	f	0	1	2	a	b	c
e	e	f	d	1	2	0	b	c	a
f	f	d	e	2	0	1	c	a	b

$\cdot$	0	1	2	a	b	c	d	e	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	a	b	c	d	e	f
2	0	2	1	d	f	e	a	c	b
a	0	a	d	e	1	b	c	f	2
b	0	b	f	1	c	d	2	a	e
c	0	c	e	b	d	2	f	1	a
d	0	d	a	c	2	f	e	b	1
e	0	e	c	f	a	1	b	2	d
f	0	f	b	2	e	a	1	d	c

c)

$+$	0	1	a	b	c	d	e	f
0	0	1	a	b	c	d	e	f
1	1	0	b	a	d	c	f	e
a	a	b	0	1	e	f	c	d
b	b	a	1	0	f	e	d	c
c	c	d	e	f	0	1	a	b
d	d	c	f	e	1	0	b	a
e	e	f	c	d	a	b	0	1
f	f	e	d	c	b	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	b	c	d	e	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	a	b	c	d	e	f
a	0	a	c	e	b	1	f	d
b	0	b	e	d	f	c	1	a
c	0	c	b	f	e	a	d	1
d	0	d	1	c	a	f	b	e
e	0	e	f	1	d	b	a	c
f	0	f	d	a	1	e	c	b

IX. Určete dimenzi vektorových prostorů

1. $[(1,2,1,2,0),(1,1,1,1,1),(2,0,1,0,2),(0,0,2,0,1)]$ jakožto podprostor $\mathbb{Z}_3^5$ resp. $\mathbb{Z}_5^5$

2. $\{(x,y,z,u,v) \mid x+y+z=0, u+v=x+z, x+u+x+v=z\}$ jakožto podprostor $\mathbb{Z}_2^5$ resp. $\mathbb{Z}_3^5$ resp. $\mathbb{Z}_5^5$

3. $[(1,1,\dots,1,0),(1,1,\dots,0,1),\dots,(1,0,\dots,1,1),(0,1,\dots,1,1)]$ jakožto podprostor $\mathbb{Z}_p^n$

4. $[(1,\alpha,\alpha,\beta),(\beta,0,1,1),(\alpha,\alpha,\beta,\alpha)]$ v $GF(4)^4$

5. $[(1,2,\dots,n-1,n),(2,3,\dots,n,1),\dots,(n,1,\dots,n-2,n-1)]$ v $GF(p^k)^n$, kde $m = \underbrace{1+\dots+1}_{m \text{ krát}}$

6. $[(x+1,x^2,x+2,2x,1),(x,x,x,2,2),(2x+1,x^2+x+2,x^2+1,1,2),(x^2+2x+1,x,0,x+2,2)]$ v $GF(27)^5$ (počítejme modulo x^3+x^2+2).

7. $\{(a,b,c,d,e) \in GF(27)^5 \mid x \cdot a + (x^2+2) \cdot c = d + 2 \cdot b, c + e \cdot (x^2+2x+1) + f \cdot (x^2+x+2) = b\}$

Výsledky a návody. **1.** 3 pro $\mathbb{Z}_3^5$, 4 pro $\mathbb{Z}_5^5$ **2.** 3 pro $\mathbb{Z}_3^5$, jinak 2 **3.** $n-1$, pokud $p|n$, jinak n **4.** 2 **5.** 2, pokud $p|n$; $n-1$, pokud $p \not| n$ a $p|\frac{n(n+1)}{2}$; jinak n

X. Vlastní čísla a podobné matice

1. Nechť A, B jsou čtvercové matice stupně n. Za jakých podmínek jsou matice AB a BA podobné?
2. Dokažte, že $\det A \neq 0$, právě když 0 není vlastním číslem A.
3. Čemu se rovná součet a součin všech vlastních čísel matice A (počítaných i s násobnostmi)?
4. Nechť A, B jsou čtvercové matice stupně n. Za jakých podmínek platí $(A+B)(A-B) = A^2-B^2$?
5. Jak vypadají vlastní čísla matice A^{-1} (a A^2), jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ všechna vlastní čísla matice A ?
6. Najděte regulární matici C (pokud existuje) takovou, že $B = CAC^{-1}$, jestliže
(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 38 & -81 \\ 16 & -34 \end{pmatrix}$; (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 24 & -11 & -22 \\ 20 & -8 & -20 \\ 12 & -6 & -10 \end{pmatrix}$;
(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$; (d) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; (e) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Výsledky a návody. **1.** Například, pokud A a B komutují (t.j. $AB = BA$), nebo je-li alespoň jedna z nich regulární, obecně to neplatí, např. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** Dokažte, že obojí nastává, právě když A je regulární. **3.** Uvědomte si, že podobné matice mají stejný determinant (podle věty o násobení determinantů) a stejnou stopu (dokažte pomocí elementárních úprav). Odtud odvoďte, že součin vlastních čísel je determinant a jejich součet je stopa matice, pokud matice je podobná nějaké Jordanově matici. **4.** Právě když $AB = BA$ (tj. matice A a B komutují). **5.** Vlastní čísla A^{-1} jsou $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$ (pokud A je regulární), vlastní čísla A^2 jsou $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ (pro libovolnou A) **6.** (řešte rovnici $CA = BC$) (a) např. $\begin{pmatrix} 0 & -27 \\ 3 & -13 \end{pmatrix}$ (b) např. $\begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 \\ -8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) neexistuje (d) neexistuje (e) neexistuje

---

XI. λ-matice a Jordanův kanonický tvar

1. Převeďte následující λ-matice na kanonický tvar: (a) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & \lambda+1 \\ \lambda+1 & \lambda^2+2\lambda+1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+5 \end{pmatrix}$
(d) $\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^3 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2 \\ 3\lambda-1 & 3\lambda^2-1 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^2-\lambda & 3\lambda^2 \\ \lambda^2-\lambda & 3\lambda^2-\lambda & \lambda^3+4\lambda^2-3\lambda \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+\lambda & 3\lambda^2+3\lambda \end{pmatrix}$
2. Nalezněte invariantní faktory λ-matice $\lambda^3 A_3 + \lambda^2 A_2 + \lambda A_1 + A_0$, jestliže
(a) $A_3 = 0$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_0 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ -5 & -2 & -4 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
(b) $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$
(c) $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -3 & -3 \end{pmatrix}$
(d) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 2 \\ 6 & -2 & 7 & 4 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$
3. Nalezněte Jordanův kanonický tvar matic
(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
4. Zjistěte, zda následující matice jsou podobné diagonálním maticím nad $\mathbb{Q}$, nad $\mathbb{R}$ a nad $\mathbb{C}$.
(a) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 8 & 15 & -36 \\ 8 & 21 & -46 \\ 5 & 12 & -27 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$

Výsledky a návody. **1.** Výsledkem jsou diagonální matice s následujícími prvky na diagonále: (a) $1, \lambda^2$; (b) $\lambda+1, (\lambda+1)(\lambda^2-2)$; (c) $1, \lambda^2+5\lambda$; (d) $\lambda-1, (\lambda^2-1)(\lambda^2+2\lambda+5)$; (e) $1, \lambda, 0$; (f) $\lambda, \lambda, \lambda^2(\lambda+1)^2$ **2.** (a) $1, \lambda-1, \lambda^2-1$; (b) $1, \lambda^2+1, 0$; (c) $\lambda^2+1, \lambda-1, 0, 0$; (d) $1, \lambda^2-\lambda+1, \lambda+1$ **3.** (a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. (a) ano i nad $\mathbb{Q}$ (b) ano nad $\mathbb{R}$, ne nad $\mathbb{Q}$ (c) ne ani nad $\mathbb{C}$ (d) ano nad $\mathbb{C}$, ne nad $\mathbb{R}$