6. cvičení (8. 11. 2007)

Co jsme dělali? Zabývali jsme se především Euklidovskými obory - v nich máme nějakou normu a příslušné dělení se zbytkem. Uvedli jsme si definici a základní vlastnosti Euklidovské normy. Kromě celých čísel (jako normu můžeme zvolit absolutní hodnotu) je Euklidovským oborem třeba obor polynomů $R[x]$, kde R je jakýkoli OI. Norma polynomu je v tomto případě jeho stupeň. Jiným Euklidovským oborem je obor $\mathbb{Z}[i]$, norma $\nu(a+bi) = a^2 + b^2$. Je-li obor Euklidovský, splývají v něm prvočinitele a ireducibilní prvky a každý prvek jde jednoznačně (až na asociovanost a změnu pořadí součinitelů) vyjádřit jako součin ireducibilních.

Hodně jsme počítali v $\mathbb{Z}[i]$ - hledali největší společné dělitele, ireducibilní rozklady. Kvůli nim jsme si napřed uvedli, jak vypadají ireducibilní prvky tohoto oboru.

Příklady

-1. Spočti $(6-4i, 3i-1)$.
0. Rozlož $7+3i$ na součin prvočinitelů.
1. Spočti NSD a nsn čísel $3i-1, 4i-2$.
2. $(1+i)^2||2$
3. Spočti $(5+3i, 6-2i)$.
4. Rozlož $3-5i$.
5. $\nu(a+bi) = (a+bi)(a-bi)$
6. Pokud $n, x, y \in \mathbb{Z}, n|x+iy$, pak $n|x, n|y$.
7. Rozlož $8+6i$.
8. Dokaž, že je-li $p = 4k+3$ prvočíslo v $\mathbb{Z}$, je to i prvočíslo v $\mathbb{Z}[i]$.
9. Dokaž, že pokud $(\nu(a), \nu(b)) = 1$, pak $(a, b) = 1$.