5. cvičení (1. 11. 2007)

Co jsme dělali? Řekli jsme si, co je to obor integrity (OI) a jak v něm definujeme dělitelnost, prvočinitele, invertibilní, ireducibilní a asociované prvky. Tyto pojmy jsme zkoumali zejména v případě polynomů.

Taky jsme se naučili hledat racionální kořeny polynomů ze $\mathbb{Z}[x]$. Je-li totiž $\frac{r}{s}$ kořen polynomu $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, platí $r|a_0, s|a_n$.

Příklady

0. Najdi všechny racionální kořeny polynomu $2x^2 - 3x + 1$.

1. Urči $(1 + x + x^2 + x^3, 2 - x^2)$ v $\mathbb{Q}[x]$.

2. Najdi všechny invertibilní polynomy nad $\mathbb{Z}$ a nad $\mathbb{Q}$.

3. Najdi všechny racionální kořeny polynomu $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 6$.

4. Množina $S = 2\mathbb{Z}$ všech sudých celých čísel není obor integrity, protože $1 \notin S$. Přesto ale má cenu hovořit o dělitelnosti, ireducibilních prvcích a prvočinitelích (s lehce pozměněnými definicemi). Popiš všechny ireducibilní prvky a prvočinitele S a najdi nějaký prvek S, který nemá jednoznačný rozklad na součin ireducibilních prvků. Popiš všechny „kvaziprvočinitele“, tedy takové prvky p, že pokud $p|ab$, pak $p|a$ nebo $p = \pm a$ nebo $p|b$ nebo $p = \pm b$. (POZOR, tento příklad je velmi zákeřný! V S například neplatí, že $k|k$, pro žádné k.)

5. Rozlož polynom $x^4 - 1$ na součin ireducibilních polynomů nad $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

6. Dokaž, že polynom $4x^5 + 7x^4 - 14x^3 + 49x^2 - 28$ je ireducibilní v $\mathbb{Z}[x]$ (použij 2. z těžších příkladů).

7. Dokaž, že je-li R OI, je i $R[x]$ OI.

8. Dokaž, že je-li $f \in \mathbb{R}[x]$ ireducibilní, má stupeň nejvýše 2.

9. Rozlož polynom $4x^5 + 4x^4 - 13x^3 - 11x^2 + 10x + 6$ na součin ireducibilních polynomů nad $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Těžší příklady

1. Dokaž, že každý nekonstantní celočíselný polynom nabývá nekonečně mnoha složených hodnot.

2. Dokaž Eisensteinovo kritérium ireducibility: Mějme $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ takový, že pro nějaké prvočíslo p platí $p|a_{n-1}, p|a_{n-2}, \ldots, p|a_1, p|a_0$, $p^2 \nmid a_0, p \nmid a_n$. Pak je f ireducibilní.