1. nebo 2. cvičení (9. nebo 11. října 2007)

Co jsme dělali?

Nejdřív jsme si připomněli princip matematické indukce.

Pak jsme se věnovali základům teorie čísel: Zmínili jsme se o definici dělitelnosti, největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku, větě o dělení se zbytkem a Euklidově algoritmu. A taky o tom, jak NSD a nsn určit z rozkladu na součin prvočísel.

Taky jsme dělali Bezoutovu větu, podle níž pro každá a, b existují x a y taková, že $(a, b) = ax + by$, a postup, jak tato x a y najít za pomoci Euklidova algoritmu.

Příklady

-1. Dokaž, že $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

0. Urči největšího společného dělitele $(84, 33)$ a vyjádři jej podle Bezoutovy věty.

1. Dokaž, že $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Dokaž, že pro každé celé číslo n platí $5 \mid n^5 - n$.

3. Spočti (163, 238). Najdi x, y tak, aby $(163, 238) = 163x + 238y$.

4. Rozmysli si, proč Euklidův algoritmus funguje. (HINT: Dokaž, že $(a, b) = (a, b - a)$.)

5. Spočti $(2^{63} - 1, 2^{98} - 1)$.

6. Dokaž, že pro nenulová čísla a, b platí $ab = nD$, kde n je jejich nejmenší společný násobek a D jejich největší společný dělitel.

7. Pro která n $n + 1 | n^2 + 1$?

8. Najdi všechna $n \in \mathbb{N}$ taková, že mezi čísly $n + 1, n + 2, \ldots, n + 10$ je největší možný počet prvočísel.

9. Pro každé $n > 2$ existuje prvočíslo, které leží mezi n a $n!$.

Těžší příklady

1. Existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $3k + 2$.

2. Kolik je $(2^{2^n} + 1, 2^{2^m} + 1)$?

3. Existuje nekonečně mnoho n takových, že $n | 2^n + 1$.