11. cvičení (16. prosince 2007)

Co jsme dělali?

Definici podgrupy a normální podgrupy (a že se značí $H \leq G$, resp. $H \trianglelefteq G$). Řekli jsme si, co jsou to konjugované prvky; co je homomorfismus a jeho jádro a obraz. A ještě co je to jednoduchá grupa.

Příklady (Není-li uvedeno jinak, je G nějaká grupa.)

0. Uvažujme zobrazení $\varphi : \mathbb{Z}(+) \to \mathbb{C}(\cdot)$, $\varphi(n) = i^n$. Je to homomorfismus? Urči jeho jádro a obraz.

1. Pokud $K \leq H \leq G$, pak $K \leq G$.

2. Je-li G komutativní, platí $H \leq G$ právě když $H \trianglelefteq G$.

3. Buď $\varphi : G \to H$ homomorfismus. Dokaž, že $\mathrm{Ker}\ \varphi \trianglelefteq G$, $\mathrm{Im}\ \varphi \leq H$.

4. $H, K \leq G \Rightarrow H \cap K \leq G$;
$H, K \trianglelefteq G \Rightarrow H \cap K \trianglelefteq G$

5. Označme $L = \{2k + 1 | k \in \mathbb{Z}\}$. Je $L(+)$ podgrupa $\mathbb{Z}(+)$? Je $L(\cdot)$ podgrupa $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$?

6. Kdy je $\varphi : G \to G$, $\varphi(x) = x^{-1}$, homomorfismus? Kdy je to izomorfismus?

7. Jsou-li a, b konjugované, jsou také a^n, b^n konjugované.

8. Zobrazení $\varphi : \mathbb{R}(+) \to \mathbb{C}(\cdot)$, $\varphi(x) = e^{2\pi i x}$, je homomorfismus. Urči jeho jádro a obraz.

9. Pro všechna n je $A_n \trianglelefteq S_n$ (S_n je množina všech permutací na n prvcích, A_n je množina všech sudých permutací - takzvaná alternující grupa).

10. Dokaž, že Kleinova grupa K_4 (z minulého cvičení) je izomorfní grupě $\{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \leq S_4$. Je to normální podgrupa?

11. Najdi homomorfismus ze $\mathbb{Z}(+)$ NA $\mathbb{Z}_n(+)$, urči jeho jádro.

12. Buď G komutativní. Označme $H = \{g \in G | g^2 = 1\}$. Dokaž, že $H \leq G$.

Těžší příklady

1. Každá podgrupa cyklické grupy je zase cyklická.

2. Je-li $n \geq 5$, je A_n jednoduchá (nemá žádné netriviální normální podgrupy).