10. cvičení (6. prosince 2007)

Co jsme dělali?

Připomněli jsme si, co je to (komutativní) grupa. Podívali jsme se na grupy $\mathbb{Z}_n(+)$. Řekli jsme si, co jsou to generátory grupy, co cyklická (nebo též 1-generovaná) grupa a co je to izomorfismus dvou grup. A taky jsme si zopakovali, jak se násobí matice.

Příklady (Není-li uvedeno jinak, všechny uvažované prvky leží v nějaké (ne nutně komutativní) grupě G.)

-1. Pro která n je množina $\{1, 2, \ldots, n-1\} \subseteq \mathbb{Z}_n$ multiplikativní grupou (uvažovanou operací je tedy násobení)?

0. Zobrazení $\log : \mathbb{R}(\cdot) \to \mathbb{R}^+(+)$ je izomrfismus.

1. Je $\mathbb{R}(+)$, $\mathbb{R}(\cdot)$, $\mathbb{R}^+(+)$, $\mathbb{R}^+(\cdot)$ grupa?

2. $(a_1 a_2 \cdots a_n)^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \cdots a_1^{-1}$

3. $(a^{-1})^{-1} = a$

4. Kolik má rovnice $xa(xb)^{-1}a = xbc$ řešení (a, b, c jsou parametry, x je neznámá).

5. $\mathbb{Z}[i](+) \simeq \{2^m 3^n | m, n \in \mathbb{Z}\}(\cdot)$

6. Je-li G cyklická, je komutativní.

7. Označme $1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $K_4 = \{1, a, b, c\}$. Je to grupa (s operací násobení matic)? Spočti multiplikativní tabulku.

8. Vyřeš v K_4 rovnice $ax = 1$, $ax^2 = b^2 c$.

9. G je komutativní, právě když pro všechna $a, b \in G$, $n \in \mathbb{N}$ platí $(ab)^n = a^n b^n$.

10. Pokud $x^2 = 1$ pro všechna x, je G komutativní.

11. G je cyklická, právě když $G \simeq \mathbb{Z}$ nebo $G \simeq \mathbb{Z}_n$.

12. Je $\mathbb{R} \backslash \{0\}(\cdot) \simeq \mathbb{R}(+)$?