9. přednáška a cvičení (21. dubna 2009)

Co jsme dělali na přednášce?

Důkaz zákona kvadratické reciprocity – podobně, ale trochu jednodušseji, než jak je v sekcích 3.5 a 3.7 ve skriptech. Počítání s Jacobiho symboly – sekce 3.8.

Co jsme dělali na cvičení?

Připomněli jsme si důkaz zákona kvadratické reciprocity pomocí počítání s kvadratickou Gaussovou sumou. Takto se dá i přímo určit pro pevné a hodnoty (a/p) v závislosti na prvočíslu p.

Pak jsme si řekli, jak se počítá s Jacobiho symboly a v čem se snadno můžeme při takovém počítání zmýlit.

A konečně jsme si připomněli grupu charakterů modulo prvočíslo p a zkoumali její vlastnosti a souvislost s počtem řešení rovnic nad $\mathbb{Z}_p$.

Příklady

0. Počítáním s kvadratickou Gaussovou sumou urči $\left(\frac{5}{p}\right)$ (v závislosti na prvočíslu $p \neq 5$).

1. Urči počet řešení kongruence $x^2 \equiv 41 \pmod{91}$. Tento výsledek porovnej s hodnotou Jacobiho symbolu $(41/91)$.

2. Počítáním s kvadratickou Gaussovou sumou urči $\left(\frac{3}{p}\right)$ (v závislosti na prvočíslu $p \neq 3$).

3. Mějme prvočíslo p, $n, a \in \mathbb{N}, n | p-1$, $(a,p)=1$.

a) Rovnice $x^n = a$ má v $\mathbb{Z}_p$ řešení, právě když $a^{(p-1)/n} = 1$.

b) Počet řešení $x^n = a$ je 0 nebo n.

c) Označme G_n množinu všech charakterů χ modulo p takových, že $\chi^n = \varepsilon$. G_n je cyklická grupa řádu n, popiš její prvky a generátory.

d) Pokud $x^n = a$ má řešení, pak pro všechna $\chi \in G_n$ platí $\chi(a) = 1$. Tedy $\sum_{\chi \in G_n} \chi(a) = n$.

e) Pokud $x^n = a$ nemá řešení, pak existuje charakter $\rho \in G_n$ takový, že $\rho(a) \neq 1$. Pak $\sum_{\chi \in G_n} \chi(a) = 0$.

f) Počet řešení rovnice $x^n = a$ v $\mathbb{Z}_p$ je roven $\sum_{\chi \in G_n} \chi(a)$.

4. Počítáním s kvadratickou Gaussovou sumou urči $\left(\frac{11}{p}\right)$ (v závislosti na prvočíslu $p \neq 11$).

5. Urči počet řešení kongruence $x^2 \equiv 657 \pmod{1003}$. Tento výsledek porovnej s hodnotou Jacobiho symbolu $(657/1003)$.