11. přednáška a cvičení (5. května 2009)

Co jsme dělali na přednášce?
Sekce 4.4 a 5.1 ze skript.

Co jsme dělali na cvičení?
Počítali jsme v oborech D celistvých prvků tělesa $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ pro bezčtvercové celé číslo d. (Pokud je $d \equiv 2, 3 \pmod 4$, je $D = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Pokud je $d \equiv 1 \pmod 4$, je $D = \mathbb{Z}[\frac{-1+\sqrt{d}}{2}]$.)

Pokud není v zadání příkladu specifikovaný obor, uvažujeme obor D celistvých prvků tělesa $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ (případně obecného konečného rozšíření $\mathbb{Q}$) s přirozenou normou (danou $N(a + b\sqrt{d}) = a^2 - db^2$).

Příklady

-1. $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ je Euklidovský obor s normou $N(a + b\sqrt{3}) = a^2 - 3b^2$ (aby byla Euklidovská, musíme vzít její absolutní hodnotu). Popiš všechny invertibilní prvky.

0. Najdi všechna celočíselná řešení rovnice $x^2 - 3y^2 = z^3$ taková, že x, y jsou nesoudělná.

1. Pokud je $N(\alpha) = p$ pro prvočíslo p, je α ireducibilní (v D).

2. a) $\mathbb{Z}[\omega]$, kde $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ je Euklidovský obor s normou $N(a + b\omega) = a^2 - ab + b^2$. Popiš všechny invertibilní prvky.

b) Najdi všechna celočíselná řešení rovnice $x^2 + 3y^2 = z^3$ taková, že x, y jsou nesoudělná.

3. Ať je d kladné bezčtvercové. Má-li rovnice $x^2 - dy^2 = -1$ řešení $\varphi(= a + b\sqrt{d})$, jsou všechna řešení rovnice $x^2 - dy^2 = -1$ tvaru $\pm\varphi^n, n \in \mathbb{Z}, n$ liché, a všechna řešení rovnice $x^2 - dy^2 = 1$ tvaru $\pm\varphi^n, n \in \mathbb{Z}, n$ sudé.

4. Dokaž, že $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ a $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}$ jsou Euklidovské obory. Popiš jejich invertibilní prvky.

5. Najdi všechna celočíselná řešení rovnice $x^2 + 8 = y^3$ taková, že x je liché.

6. Dokaž, že pokud $N(\alpha) \neq N(\beta)$, nejsou α, β asociované.

7. Dokaž, že $2 \cdot 3 = (\sqrt{6})^2$ jsou dva různé rozklady čísla 6 v $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ na součin ireducibilních prvků. Tedy $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ není obor s jednoznačným rozkladem.

8. Najdi všechna celočíselná řešení rovnice $x^2 + 200 = y^3$ taková, že $(x, 10) = 1$.

9. Dokaž, že $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ není obor s jednoznačným rozkladem.

10. Najdi všechna celočíselná řešení rovnice $x^2 + 2 = y^5$.